第二讲：参数估计-区间估计

康雁飞

数量经济与商务统计系

Outline

Outline

区间估计做什么?

1. 参数的点估计根据样本得到一个具体的数值，便于计算和使用；但其精度如何，点估计本身不能回答。
2. 区间估计给出未知参数的一个区间, 是度量一个点估计精度的方法。

Outline

区间估计的定义

区间估计

设 θ 是总体的一个参数，$X_1, \cdots, X_n$ 是样本，区间估计就是要找两个统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(X_1, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(X_1, \cdots, X_n)$，把 θ 估计在 $\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$ 内。

注意：

1. θ 是参数，不是随机变量。
2. $\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U$ 是统计量，所以都是随机变量。

区间估计

- 由于样本的随机性，$\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U$ 也有随机性，盖住未知参数 θ 的可能性并不确定。如果要对 θ 的估计准确度有足够信心，就要要求 $P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U)$ 尽可能大，但这必然导致区间长度增大，区间估计失去意义。
- 为解决此问题，通常事先给定 $\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$ 盖住 θ 的概率（称为置信区间）。

置信区间

设 θ 是总体的一个参数，其参数空间为 Θ，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自该总体的样本，对给定的一个 $\alpha\ (0 < \alpha < 1)$，若有两个统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(X_1, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(X_1, \cdots, X_n)$，若对任意的 $\theta \in \Theta$, 有

$$P_\theta\left(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U\right) \geq 1 - \alpha,$$

则称随机区间 $\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$ 为 θ 的置信水平（confidence level）为 $1-\alpha$ 的置信区间（confidence interval），或简称 $\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$ 是 θ 的 $1-\alpha$ 置信区间。$\hat{\theta}_L$ 和 $\hat{\theta}_U$ 分别称为 θ 的（双侧）置信下限和置信上限。

关于置信区间的几点注意

1. 在大量重复使用 θ 的置信区间 $\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$ 时，每次得到的样本观测值是不同的，从而每次得到的 CI 也是不一样的。
2. 对一次具体的观测值而言，θ 可能在置信区间 $\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$ 内，也可能不在。
3. 平均而言，在大量的区间估计观测值中，至少有 $100(1-\alpha)\%$ 的区间含有 θ。

举例

设 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 是来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\ \bar{x} - t_{1-\alpha/2}(9)s/\sqrt{10},\ \ \bar{x} + t_{1-\alpha/2}(9)s/\sqrt{10}.\ \right]$$

这里，$t_{1-\alpha/2}(9)$ 是自由度为 9 的 t 分布的 $1-\alpha/2$ 分位数。

1. 若取 $\alpha = 0.1$，则 $t_{0.95}(9) = 1.8331$，上式化为

$$[\bar{x} - 0.5797s, \quad \bar{x} + 0.5797s]$$

2. 若取 $\alpha = 0.5$?

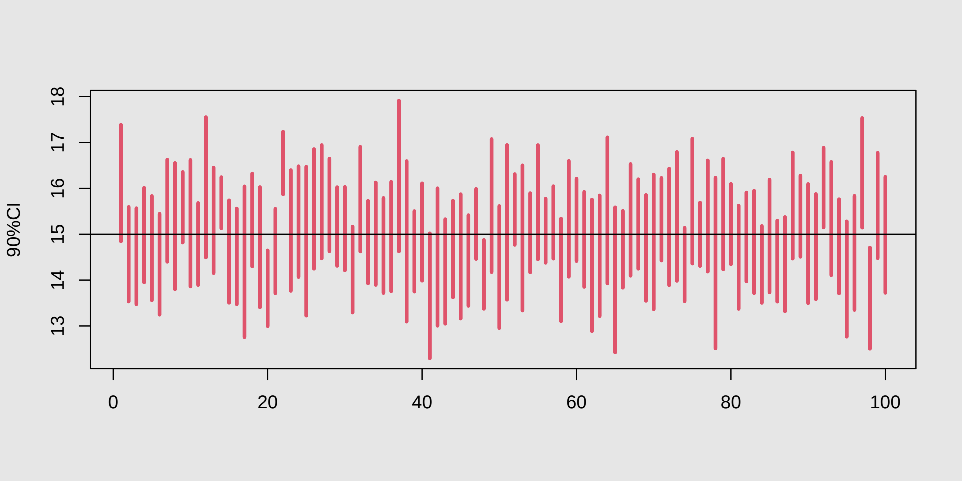
课堂练习一

现假定 $\mu = 15$,$\sigma^2 = 4$，则我们可以用随机模拟方法由 $N(15, 4)$ 产生一个容量为 10 的样本。

1. 若取 $\alpha = 0.1$，计算 μ 的区间估计。重复上述方法 100 次，可得到 100 个样本情形下得到的 100 个区间估计，多少个包含真实参数？怎样理解置信水平?
2. 若取 $\alpha = 0.5$?

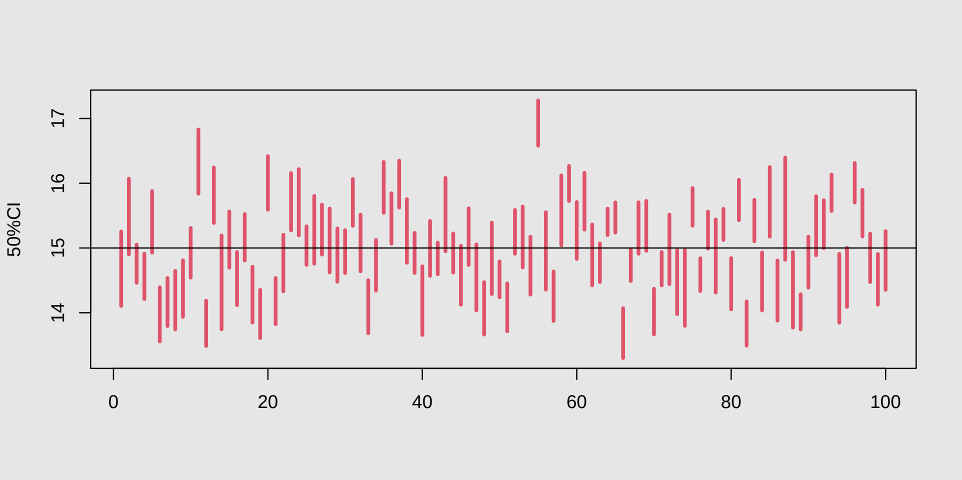
课堂练习一

1. $\alpha = 0.1$:



课堂练习一

2 $\alpha = 0.5$:



置信区间

在总体为连续的场合，可以用等式定义置信区间。

同等置信区间

若对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，和任意的 $\theta\in\Theta$，有

$$P_\theta\left(\hat{\theta}_L \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_U\right) = 1-\alpha,$$

称 $\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间。在总体为连续分布场合下可以实现。

置信下限

若对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，和任意的 $\theta \in \Theta$，有

$$P_\theta\left(\hat{\theta}_L \leq \theta\right) \geq 1-\alpha,$$

则称 $\hat{\theta}_L$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的（单侧）置信下限。假如等号对一切 $\theta \in \Theta$ 成立, 则称 $\hat{\theta}_L$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信下限。

置信上限

若对给定的 α $(0 < \alpha < 1)$，和任意的 $\theta \in \Theta$，有

$$P_\theta\left(\hat{\theta}_U \geq \theta\right) \geq 1 - \alpha,$$

则称 $\hat{\theta}_U$ 为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的（单侧）置信上限。假如等号对一切 $\theta \in \Theta$ 成立，则称 $\hat{\theta}_U$ 为 θ 的 $1 - \alpha$ 同等置信上限。

Outline

1 区间估计做什么?

2 区间估计的定义

3 **枢轴量法**

4 单个正态总体参数的置信区间

5 两个正态总体参数的置信区间

枢轴量法求区间估计

例：已知正态总体方差 σ^2，求总体均值 μ 的置信区间。

- 给定正态总体：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，总体方差 σ^2 已知。在总体中抽取一个容量为 n 的样本 $X_1, \cdots, X_n$。根据样本均值的性质：
$$G = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$
- 枢轴量 G：分布与未知参数 μ 无关，关于 μ 和样本的函数。
- 枢轴量法即要构建一个与未知参数无关的性状良好的已知分布，以便运用该分布性质构造置信区间。

枢轴量法求区间估计

- 由标准正态分布性质，对任意一个非负数 c

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq c\right\} = 2\Phi(c)-1,$$

即

$$\begin{aligned} & P_\mu(\bar{x}-c\sigma/\sqrt{n} \leqslant \mu \leqslant \bar{x}+c\sigma/\sqrt{n}) \\ = & 2\Phi(c)-1 = 1-\alpha, \end{aligned}$$

所以 $c = u_{1-\alpha/2}$。

- 上式满足了置信区间的定义，即以 $1-\alpha$ 的概率保证 μ 落在内，所以 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间是

$$\left[\ \bar{x}-u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},\ \ \bar{x}+u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}.\ \right]$$

枢轴量法

构造未知参数 θ 的置信区间的最常用的方法是枢轴量法，其步骤可以概括为如下三步：

1. 设法构造一个样本和未知参数 θ 的函数 $G = G(X_1, \cdots, X_n, \theta)$ 使得 G 的分布不依赖于未知参数。一般称具有这种性质的 G 为枢轴量。
2. 适当地选择两个常数 c, d，使对给定的 α $(0 < \alpha < 1)$ 有
$$P(c \leq G \leq d) = 1 - \alpha.$$
3. 假如能将 $c \leq G \leq d$，进行不等式等价变形得 $\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U$，则 $\left[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right]$ 是 θ 的 $1 - \alpha$ 同等置信区间。

两点说明

1. 满足置信度要求的 c 与 d 通常不唯一。若有可能，应选平均长度 $E\left(\hat{\theta}_U-\hat{\theta}_L\right)$ 达到最短的 c 与 d，这在 G 的分布为对称分布场合通常容易实现。
2. 实际中，选平均长度 $E\left(\hat{\theta}_U-\hat{\theta}_L\right)$ 尽可能短的 c 与 d，这往往很难实现，因此，常这样选择 c 与 d，使得两个尾部概率各为 $\alpha/2$，即 $P(G<c)=P(G>d)=\alpha/2$，这样的置信区间称为等尾置信区间。这是在 G 的分布为偏态分布场合常采用的方法。

Outline

单个正态总体参数的置信区间

正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 是最常见的总体，我们知道

1. μ 可用 $\bar{X}$ 估计，其分布为 $N(\mu, \sigma^2/n)$；
2. σ^2 可用样本方差 S^2 作为点估计。

下面针对正态总体详细讨论两个参数的置信区间。

1. μ 的置信区间（分 σ 已知和未知两种情况）；
2. σ^2 的置信区间。

σ 已知时，μ 的置信区间

- 在这种情况下，枢轴量可选为
$$G = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$
- c 和 d 应满足
$$P(c \leq G \leq d) = \Phi(d) - \Phi(c) = 1 - \alpha.$$
- 经过不等式变形可得
$$P_\mu(\bar{X} - d\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} - c\sigma/\sqrt{n}) = 1 - \alpha.$$

- 该区间长度为 $(d-c)\sigma/\sqrt{n}$。当 $d=-c=u_{1-\alpha/2}$ 时，$d-c$ 达到最小。由此给出的同等置信区间为

$$\left[\,\bar{X}-u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},\ \ \bar{X}+u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}.\,\right]$$

- 这是一个以 $\bar{X}$ 为中心, 半径为 $u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ 的对称区间，常将之表示为

$$\bar{X}\pm u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}.$$

举例

用天平秤某物体的重量 9 次，得平均值为 15.4（克），已知天平秤量结果为正态分布，其标准差为 0.1 克。试求该物体重量的 0.95 置信区间。

- 此处 $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，查表知 $u_{0.975}=1.96$，于是该物体重量的 0.95 置信区间为
$$\bar{x} \pm u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} = 15.4 \pm 1.96 \times 0.1/\sqrt{9}.$$
- 从而该物体重量的 0.95 置信区间为 $[15.3347, 15.4653]$。

举例

设总体为正态分布 $N(\mu,1)$，为得到 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间长度不超过 1.2，样本容量应为多大?

- μ 的 0.95 置信区间为
  $$\left[\,\bar{x}-u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n},\ \ \bar{x}+u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n},\,\right]$$
  其区间长度为 $2u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}$，它仅依赖于样本容量 n 而与样本具体取值无关。
- 现要求 $2u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}\leqslant 1.2$，立即有 $n\geqslant(2/1.2)^2u_{1-\alpha/2}^2$。
- 由于 $1-\alpha=0.95$，所以 $u_{1-\alpha/2}=1.96$，从而 $n\geqslant(5/3)^2\times 1.96^2=10.67\approx 11$。

σ 未知时，μ 的置信区间

- 这时可用 t 统计量，
$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1),$$
因此 t 可以用来作为枢轴量，得到 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间为
$$\left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}\right].$$

举例

假设轮胎的寿命服从正态分布，为估计某种轮胎的平均寿命，现随机地抽 12 只轮胎试用，测得它们的寿命（单位：万公里）如下：

4.68	4.85	4.32	4.85	4.61	5.02
5.20	4.60	4.58	4.72	4.38	4.70

- 此处正态总体标准差未知，可使用 t 分布求均值的置信区间。经计算有 $\bar{x} = 4.7092, s^2 = 0.0615$。
- 取 $\alpha = 0.05$，查表知 $t_{0.975}(11) = 2.2010$，于是平均寿命的 0.95 置信区间为：

$$4.7092 \pm 2.2010 \cdot \sqrt{0.0615}/\sqrt{12} = [4.5516, 4.8668].$$

举例

- 在实际问题中，由于轮胎的寿命越长越好，因此可以只求平均寿命的置信下限，也即构造单边的置信下限。

$$P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} < t_{1-\alpha}(n-1)\right) = 1-\alpha.$$

- 由不等式变形可知 μ 的 $1-\alpha$ 置信下限为

$$\bar{x} - t_{1-\alpha}(n-1)s/\sqrt{n}.$$

- 将 $t_{0.95}(11) = 1.7959$ 代入计算可得平均寿命 μ 的 0.95 置信下限为 4.5806（万公里）。

课堂练习二

1. 在 R 中实现正态总体下 μ 的区间估计。
2. 请思考哪些因素区间估计结果?

μ 未知, σ^2 的置信区间

- 若总体为正态分布, 则
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$
该分布不依赖未知参数 σ^2，可作为枢轴量。
- 取枢轴量 $G = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，由于 χ^2 分布是偏态分布, 寻找平均长度最短区间很难实现，一般都用等尾置信区间：采用 χ^2 的两个分位数 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 和 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$，在 χ^2 分布两侧各截面积为 $\alpha/2$ 的部分，使得
$$P\left(\chi^2_{\alpha/2} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

- 由此给出 σ^2 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[(n-1)S^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \quad (n-1)S^2/\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right].$$

课堂练习三（手算 + R 实现）

某厂生产的零件重量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，现从该厂生产的零件中抽取 9 个，测得其重量为（单位：克）

45.3　45.4　45.1　45.3　45.5　45.7　45.4　45.3　45.6

试求总体标准差 σ 的 0.95 置信区间。

大样本下总体均值的置信区间

1. 非正态总体场合下，寻找枢轴量及其分布比较困难。如何办?

2. 在样本容量充分大时，可以用渐近分布来构造近似的置信区间。
   - 根据中心极限定理，$\bar{X} \sim AN(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，即 $\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim AN(0,1)$.
   - 样本标准差 S 是总体标准差 σ 的相合估计。

3. 总体均值 μ 的近似 $1-\alpha$ 置信区间为:

$$\left[\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

举例

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 $b(1,p)$ 的样本，求 p 的 $1-\alpha$ 置信区间。由中心极限定理, 有 $\bar{X} \sim AN\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$。所以

$$u = \frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim AN(0,1)$$

u 可以作为近似枢轴量。对给定 α, 有

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right| \le u_{1-\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha.$$

通过变形, 可得到置信区间为

$$\left[\frac{1}{1+\frac{\lambda}{n}}\left(\bar{X}+\frac{\lambda}{2n}-\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})\lambda}{n}+\frac{\lambda^2}{4n^2}}\right), \frac{1}{1+\frac{\lambda}{n}}\left(\bar{X}+\frac{\lambda}{2n}+\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})\lambda}{n}+\frac{\lambda^2}{4n^2}}\right)\right],$$

其中记 $\lambda = u_{1-\alpha/2}^2$，实用中通常略去 λ/n 项（因为 n 很大），于是可将置信区间近似为

$$\left[\bar{X}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \quad \bar{X}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right].$$

举例

某大学从该校本科生中随机抽取 100 人，他们平均每日体育锻炼时间为 26 分钟，样本方差为 34。试以 95% 置信水平的置信区间估计学生每日锻炼时间。

- 此处，$n = 100, \bar{x} = 26, s^2 = 34$。
- 总体均值 95% 置信水平的近似置信区间为:

$$\left[\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

- 代入得，近似区间估计为 26 ± 1.14。

区间估计的应用：样本量的确定

思考：样本量越大，估计精度越高，但大样本需要的成本高，所以实际中人民关心：在一定的精度要求下，至少需要多大的样本量?（样本量的确定问题）

举例

某传媒公司欲调查电视台某综艺节目收视率 p，为使得 p 的 $1-\alpha$ 置信区间长度不超过 d_0，问应调查多少用户?

- 这是关于二点分布比例 p 的置信区间问题，两点分布 p 的 $1-\alpha$ 置信区间
$$\left[\bar{X}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}},\quad \bar{X}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right].$$
- 因此 $1-\alpha$ 的置信区间长度为 $2u_{1-\alpha/2}\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n}$。这是一个随机变量，但由于 $\bar{X}\in(0,1)$, 所以对任意的观测值有 $\bar{X}(1-\bar{X})\leq 0.5^2=0.25$。

- 这也就是说 p 的 $1-\alpha$ 的置信区间长度不会超过 $u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}$。现要求 p 的的置信区间长度不超过 d_0，只需要 $u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n} \le d_0$ 即可，从而

$$n \ge \left(\frac{u_{1-\alpha/2}}{d_0}\right)^2.$$

- 这是一类常见的寻求样本量的问题。比如，若取 $d_0 = 0.04, \alpha = 0.05$，则

$$n \ge \left(\frac{u_{0.975}}{0.04}\right)^2 = \left(\frac{1.96}{0.04}\right)^2 = 2401.$$

- 这表明，要使综艺节目收视率 p 的 0.95 置信区间的长度不超过 0.04，则需要对 2401 个用户作调查。

思考：

1. 如果在置信水平不变的情况下，你要使目前所得到的置信区间的长度减少一半，样本量应增加到目前样本容量的多少倍?
2. 如果保持置信区间的长度不变，样本容量的增加会使什么发生变化?

Outline

1. 区间估计做什么?
2. 区间估计的定义
3. 枢轴量法
4. 单个正态总体参数的置信区间
5. 两个正态总体参数的置信区间

两个正态总体参数的置信区间

设 $X_1, \cdots, X_m$ 是来自 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$Y_1, \cdots, Y_n$ 是来自 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且两个样本相互独立。

- $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 分别是它们的样本均值。
- $S_x^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2$ 和 $S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ 分别是它们的样本方差。
- 下面讨论两个均值差和两个方差比的置信区间
  1. $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间
  2. σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

σ_1^2 和 σ_2^2 已知时

- 由定理 5.4.1 及随机变量函数运算，此时有

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right).$$

- 枢轴量可取

$$u = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1).$$

- 沿用前面方法, $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1 - \alpha$ 置信区间为

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}.$$

$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时

- 由定理 5.4.1 及随机变量函数运算, 此时有

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sigma^2\right),$$

$$\frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2).$$

- 由于 $\bar{X}, \bar{Y}, S_x^2, S_y^2$ 相互独立, 故可构造服从 $t(m+n-2)$ 分布的枢轴量

$$t = \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}} \sim t(m+n-2).$$

- 沿用前面方法, 可推出 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\bar{X} - \bar{Y} \mp \sqrt{\frac{m+n}{mn}} S_w t_{1-\alpha/2}(m+n-2),$$

其中 $S_w^2 = \frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2}$.

当 m 和 n 都很大时的近似置信区间

当 m 和 n 都很大时，则无需任何有关 σ_1^2, σ_2^2 的信息。由中心极限定理可知

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_x^2}{m} + \frac{S_y^2}{n}}} \sim AN(0, 1).$$

由此可推出 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1 - \alpha$ 近似置信区间为

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_x^2}{m} + \frac{S_y^2}{n}}, \quad \bar{X} - \bar{Y} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_x^2}{m} + \frac{S_y^2}{n}}\right].$$

σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

- 由于

$$(m-1)S_x^2/\sigma_1^2 \sim \chi^2(m-1), (n-1)S_y^2/\sigma_2^2 \sim \chi^2(n-1),$$

且 S_x^2 与 S_y^2 相互独立, 故可仿照 F 变量构造如下枢轴量

$$F = \frac{S_x^2/\sigma_1^2}{S_y^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1).$$

- 对给定的 $1-\alpha$,

$$P\left(F_{\alpha/2}(m-1,n-1) \leq \frac{S_x^2}{S_y^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)\right) = 1-\alpha.$$

- 经不等式变形即给出 σ_1^2/σ_2^2 的 $1-\alpha$ 置信区间

$$\left[\frac{S_x^2}{S_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \quad \frac{S_x^2}{S_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right].$$

课堂练习四：手算及 R 实现

某车间有两台自动机床加工一类套筒，假设套筒直径服从正态分布。现在从两个班次的产品中分别检查了 5 个和 6 个套筒，得其直径数据如下 (单位：厘米)：

- 甲班：5.06, 5.08, 5.03, 5.00, 5.07
- 乙班：4.98, 5.03, 4.97, 4.99, 5.02, 4.95

试求两班加工套筒直径的方差比 $\sigma_{\text{甲}}^2/\sigma_{\text{乙}}^2$ 的 0.95 置信区间。

小结

1. 理解并熟悉掌握区间估计的统计含义及相对点估计的优点等
2. 熟悉掌握求解区间估计的方法（枢轴量法及其一般步骤）
3. 理解并熟悉单正态总体参数和双正态总体参数置信区间的求法
4. 理解并掌握大样本下总体均值近似置信区间的原理和求法
5. 了解区间估计的应用：样本量的确定

作业

- 单个总体参数的置信区间
  - 教材习题 6.6：1-3、5-6、8、11-12
- 两个总体参数的置信区间
  - 教材习题 6.6：9-10

本章复习与思考

1. 总体未知参数矩估计的思想方法是什么？试写出 0-1 分布、二项分布 $b(m,p)$、泊松分布 $P(\lambda)$、均匀分布 $U(a,b)$、正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中有关参数的矩估计式。
2. 极大似然估计的主要步骤是什么?
3. 未知参数的估计量与估计值有什么区别?
4. 估计量的三个基本评价标准是什么?
5. 求参数置信区间的一般方法是什么？对正态总体，试从有关的统计量自行导出几类参数的置信区间?
6. 置信度的含义是什么？置信度、区间长度和样本容量的关系怎样?