北京航空航天大學
经济管理学院
BEIHANG UNIVERSITY
SCHOOL OF ECONOMICS AND MANAGEMENT

第 2.2 讲：一元线性回归模型

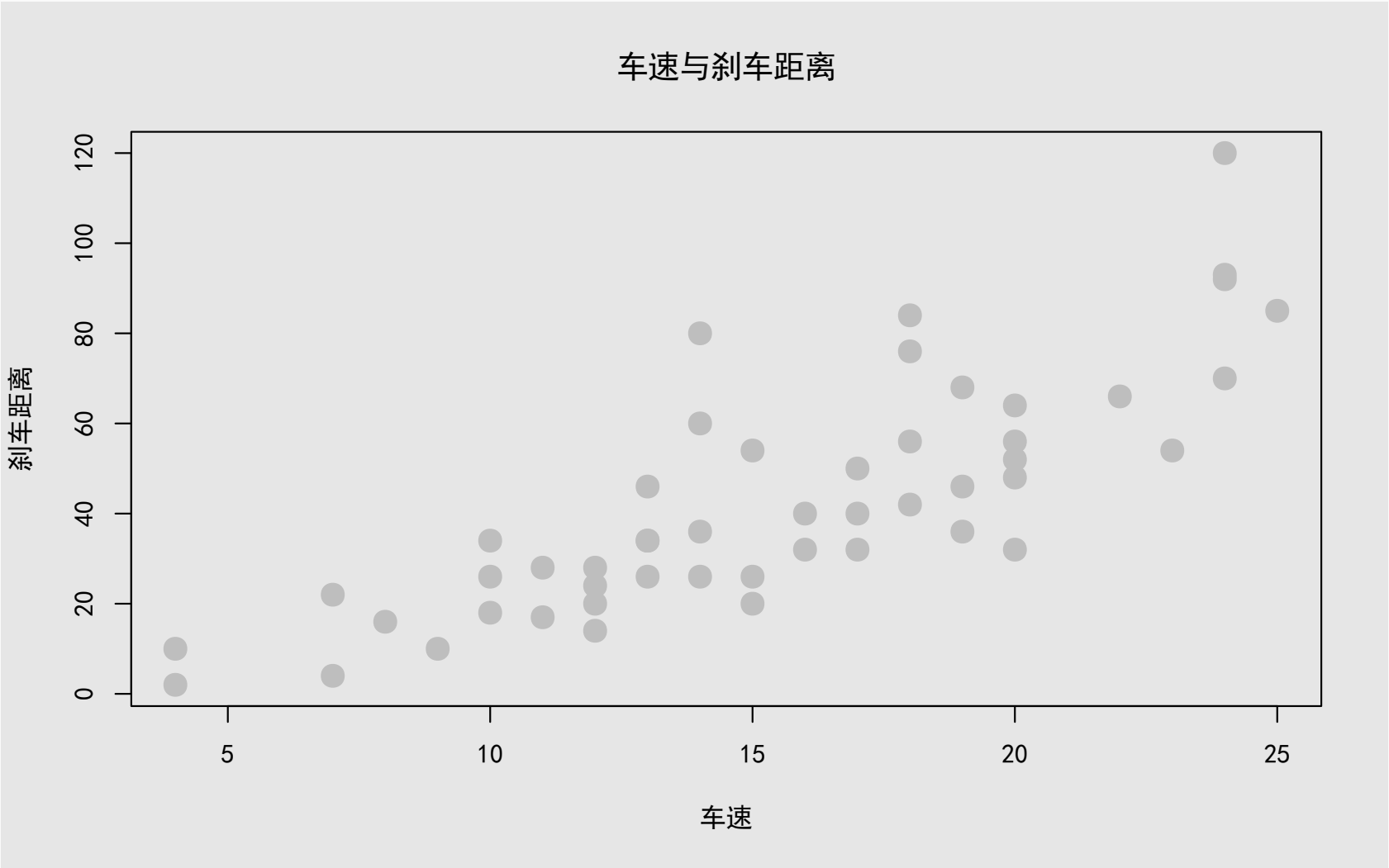
康雁飞

2021-05-12

Outline

Outline

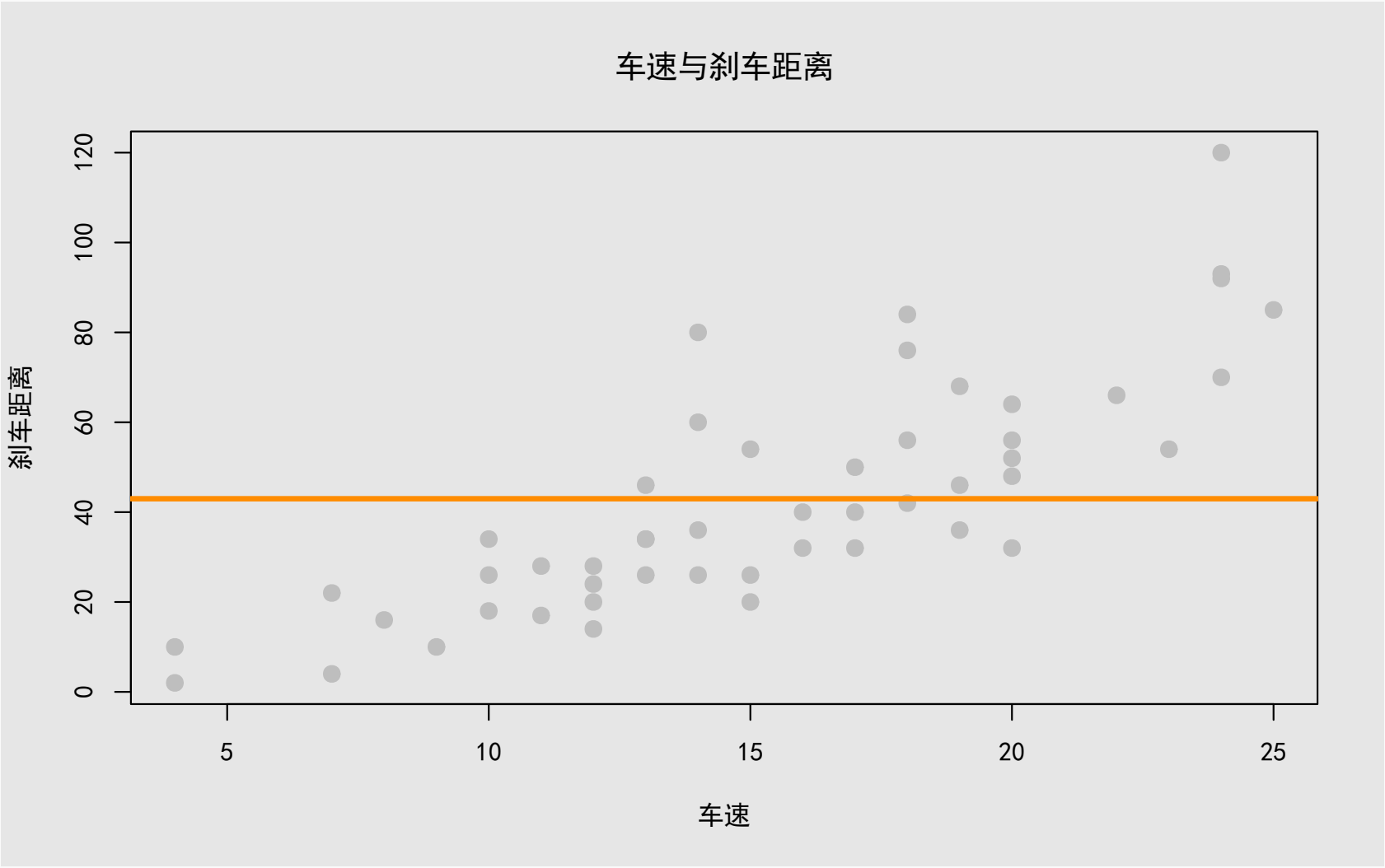
一个例子：车速和刹车距离



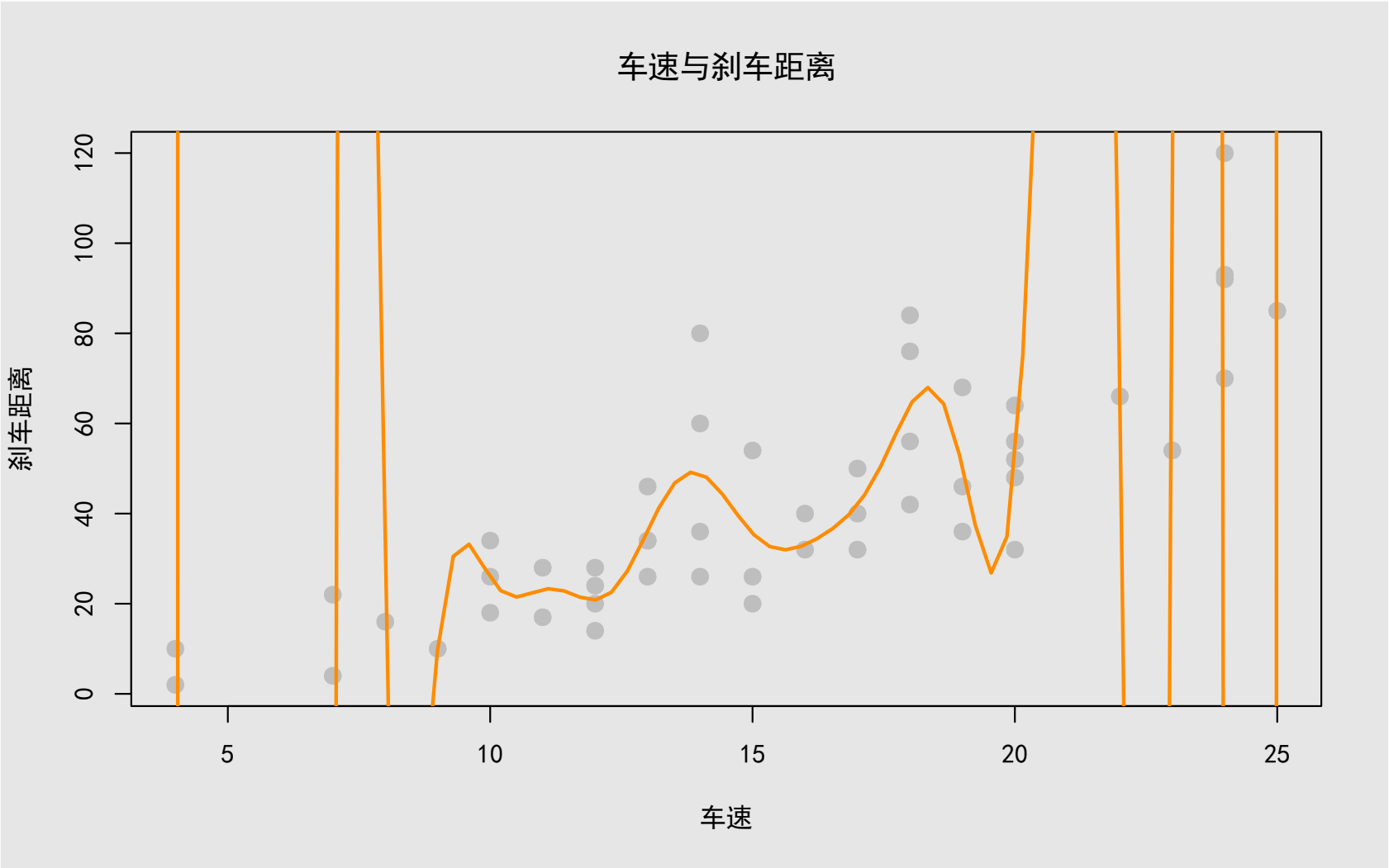
问题定义

- 我们有观测值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$，其中 n 为观测值数量。其中 $x_i,\ i = 1, \cdots, n$ 代表自变量，$y_i,\ i = 1, \cdots, n$ 代表因变量。
- 回归模型的目的就是找到 $Y = f(X) + \epsilon$。
- 解释 + 预测。
- 如何找到 $f()$?

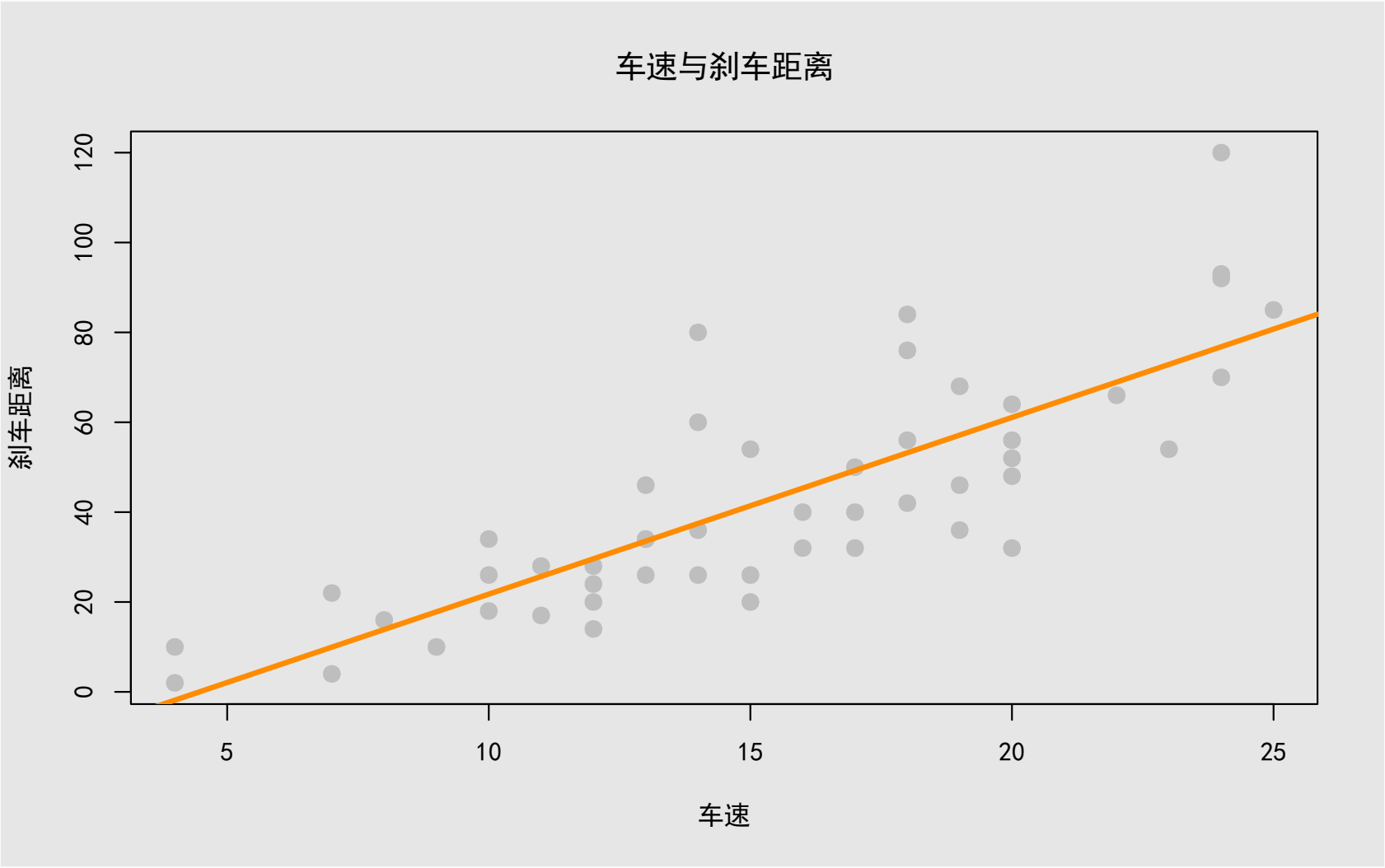
尝试 1



尝试 2



尝试 3



Outline

一元线性回归模型

一元线性回归模型形式为:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i,\ i = 1, \cdots, n,$$

其中 $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$。

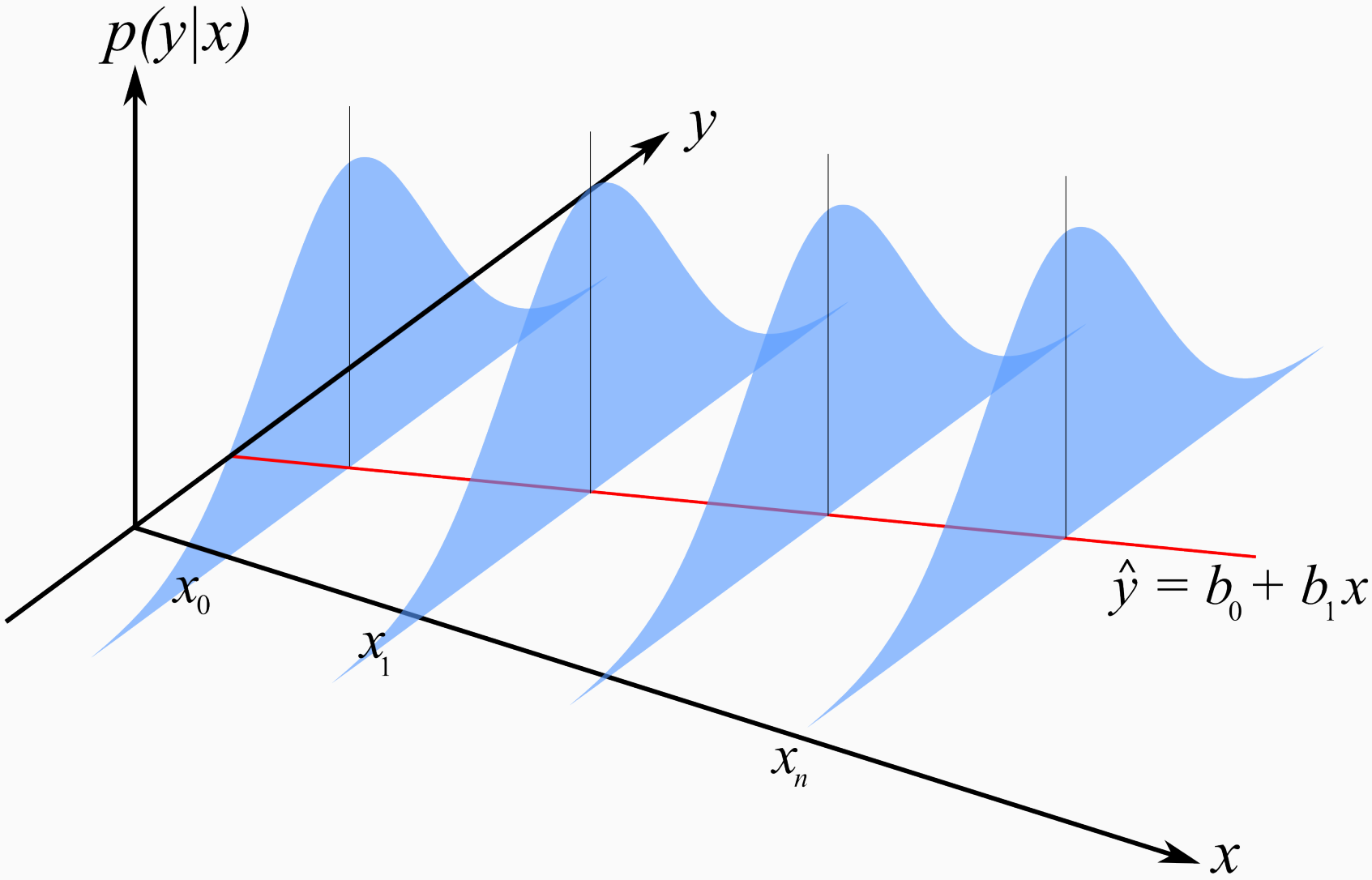
一元线性回归模型

1. x_i 是已知观测值。
2. Y_i 是随机变量。
3. y_i 是 Y_i 的可能取值。
4. 模型中需要估计的参数为 β_0, β_1, σ。
5. 又叫简单线性回归模型。

Y_i 的分布?

- $E(Y_i|X_i = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$.
- $\text{var}(Y_i|X_i = x_i) = \sigma^2$.
- Y_i 的分布?

Y_i 的分布

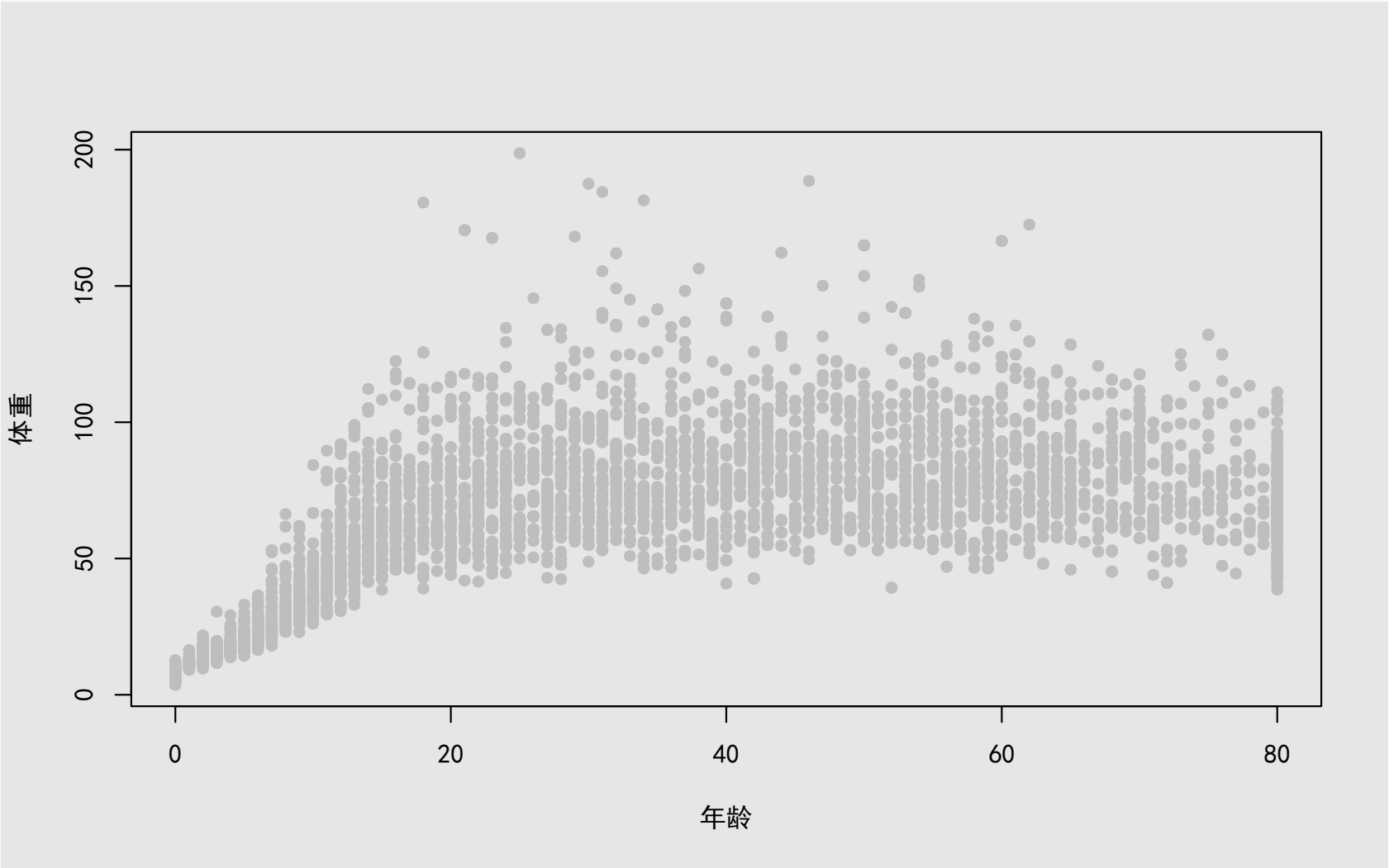


一元线性回归模型假设（LINE）

- 线性关系（Linear）
- 误差项独立（Independent）
- 正态（Normal）
- 同方差（Equal Variance）

年龄和体重

数据下载：点击这里。



Outline

最小二乘法

我们有观测值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$，那么模型估计的第一个问题是：如果根据观测数据估计出 β_0 和 β_1?

- $\hat{y}_i \neq y_i$
- $e_i = y_i - \hat{y}_i$
- 最小二乘法：

最小二乘法

- 最小化残差平方和（Sum of Squared Errors，SSE）

$$f(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2.$$

- $\arg\min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2.$

最小化残差平方和 $\rightarrow$ 优化问题

求偏导：

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (x_i) (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$$

化简得到：

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i) (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

最小二乘估计

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

最大似然估计

- 我们的模型为:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i,\ i = 1, \cdots, n,$$

其中 $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$。

- 我们知道: $Y_i | X_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$.

似然函数?

似然函数

$$
\begin{aligned}
& L\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2\right) \\
= & \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^2\right] \\
= & \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

对数似然

上述似然函数取对数：

$$\log L\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right)^2$$

通过求导可以最大化对数似然：

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_0} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\left(\sigma^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right)^2$$

最大似然估计

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

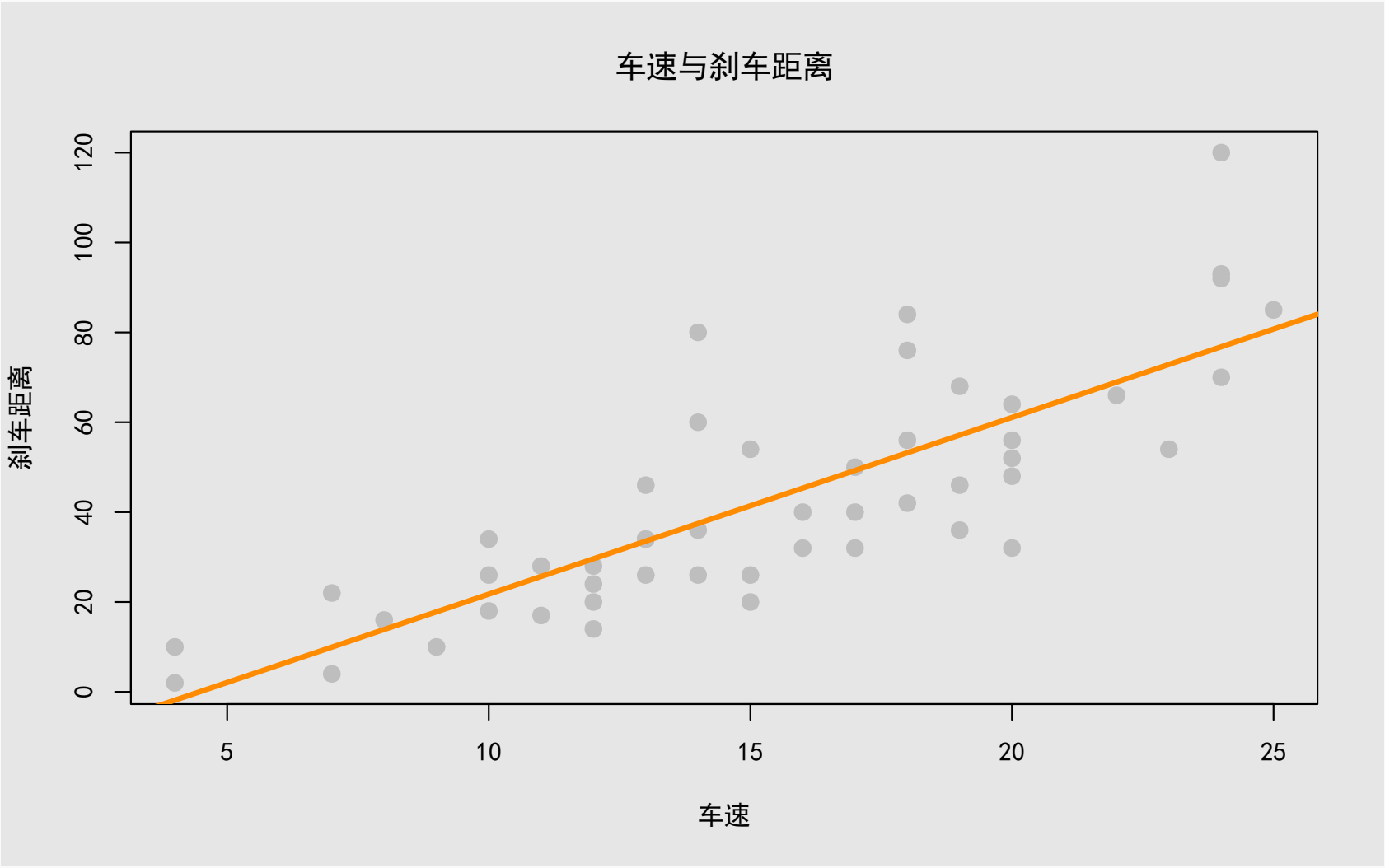
$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

在 R 中建立一元线性回归模型

```
stop_dist_model <- lm(dist ~ speed,
                      data = cars)
plot(dist ~ speed, data = cars,
     xlab = " 车速",
     ylab = " 刹车距离",
     main = " 车速与刹车距离",
     pch  = 20,
     cex  = 2,
     col  = "grey")
abline(stop_dist_model, lwd = 3,
       col = "darkorange")
```

在 R 中建立一元线性回归模型



模型系数

```
coef(stop_dist_model)
```

```
## (Intercept)       speed
##  -17.579095    3.932409
```

残差（Residuals）

残差就是真实值和估计值之间的差：

$$e_i = y_i - \hat{y}_i.$$

```
stop_dist_model$residuals
```

```
##          1          2          3          4          5          6          7
##   3.849460  11.849460  -5.947766  12.052234   2.119825  -7.812584  -3.744993
##          8          9         10         11         12         13         14
##   4.255007  12.255007  -8.677401   2.322599 -15.609810  -9.609810  -5.609810
##         15         16         17         18         19         20         21
##  -1.609810  -7.542219   0.457781   0.457781  12.457781 -11.474628  -1.474628
##         22         23         24         25         26         27         28
##  22.525372  42.525372 -21.407036 -15.407036  12.592964 -13.339445  -5.339445
##         29         30         31         32         33         34         35
## -17.271854  -9.271854   0.728146 -11.204263   2.795737  22.795737  30.795737
##         36         37         38         39         40         41         42
## -21.136672 -11.136672  10.863328 -29.069080 -13.069080  -9.069080  -5.069080
##         43         44         45         46         47         48       2849
##   2.930920  -2.933898 -18.866307  -6.798715  15.201285  16.201285  43.201285
```

方差估计

误差项方差 σ^2 的无偏估计为：

$$
\begin{aligned}
s_e^2 &= \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \\
&= \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2
\end{aligned}
$$

注意：$\bar{e} = 0$.

练习：车速与刹车距离

请估计误差项标准差。

```
stop_dist_model_summary <- summary(stop_dist_model)
stop_dist_model_summary$sigma
```

```
## [1] 15.37959
```

误差分解

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$$

- SST = SSE + SSR
- SST: Sum of Squares Total，总平方和
- SSE: Sum of Squares Error，残差平方和
- SSR: Sum of Squares Regression，回归平方和

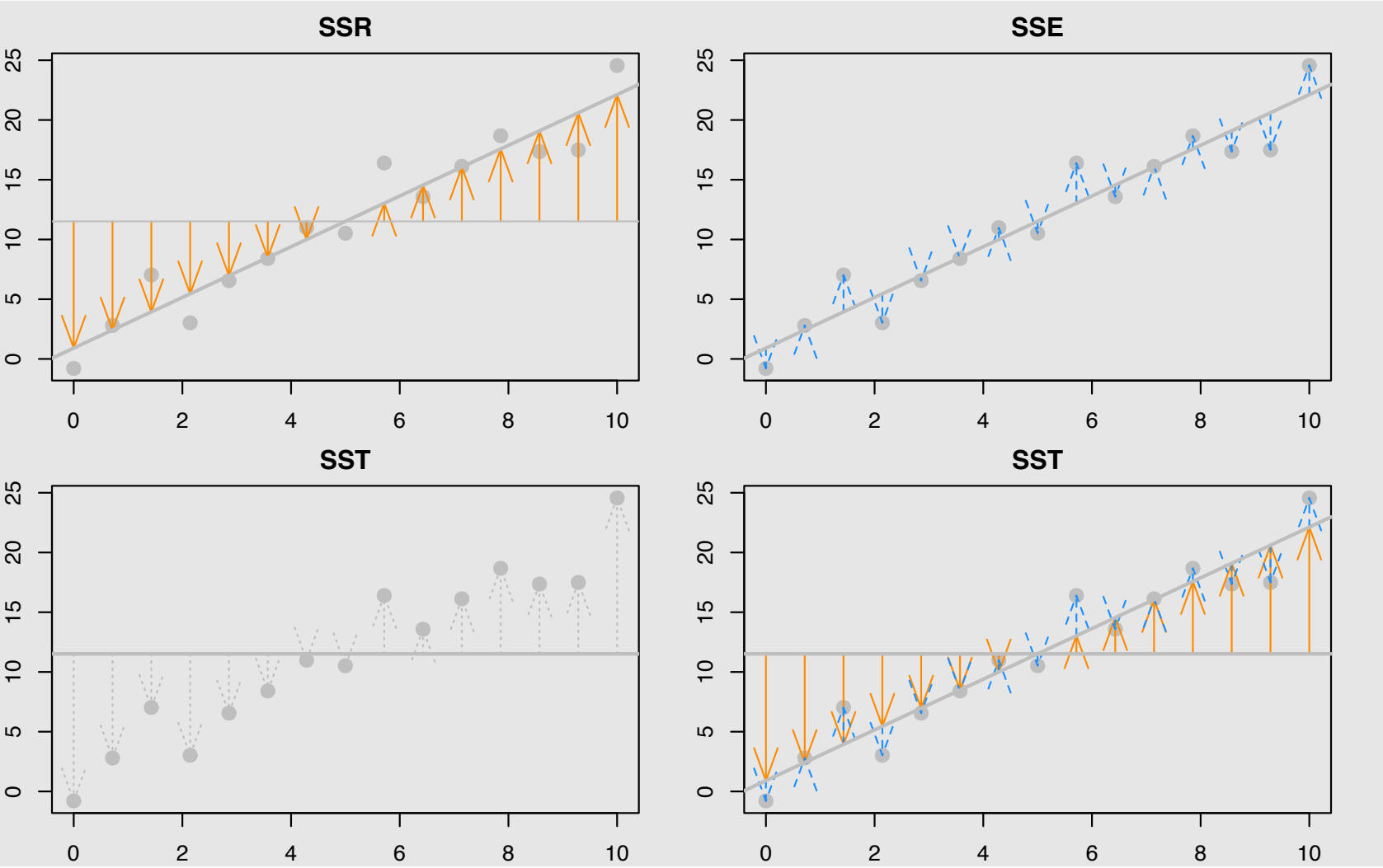
拟合优度 R^2

拟合优度（Goodness of Fit），又叫测定系数（Coefficient of Determination）：

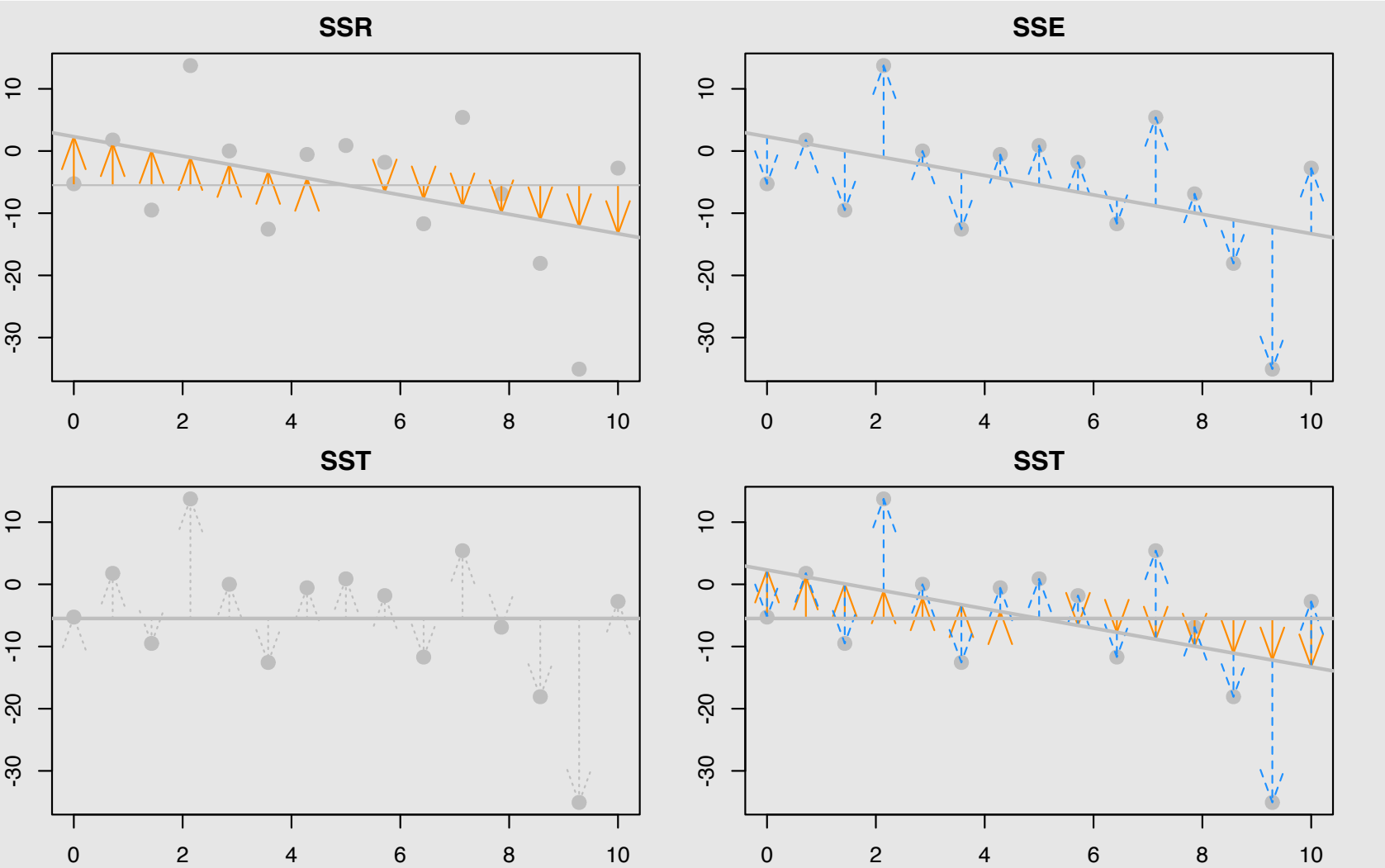
$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

- SSR 越大：用回归方程解释 Y 变异的部分越多。
- SSE 越小：观测值 Y 绕回归线越紧密，拟合越好。

$R^2 = 0.92$



$R^2 = 0.19$



R^2 的性质

1. $0 \leq R^2 \leq 1$
2. $R^2 = \hat{\beta}_1^2 \frac{s_x^2}{s_y^2}$
3. $R^2 = [r(X, Y)]^2$

R 中求拟合优度

```
stop_dist_model_summary$r.squared
```

```
## [1] 0.6510794
```

如何进行模型评价?

样本数据的回归模型总是可以求到的，但是它是否确实是总体回归模型的正确估计呢?

1. 该模型能否较好地解释 y_i 的取值变化规律?
2. 自变量 X 真的可以解释 Y 吗?
3. 关于一元线性回归模型的几个基本假设条件是否得到满足?

Outline

Gauss–Markov 定理

如果基本假设成立，最小二乘估计量是总体参数 β_0 和 β_1 的线性最小方差无偏估计量。

标准误差（Standard Errors, SE）

我们可以推导出：

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)\right)$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right)$$

标准误差（Standard Errors, SE）

但是 σ 未知，所以需要用 s_e 代替：

$$\mathrm{SE}\left[\hat{\beta}_0\right] = s_e\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}}$$
$$\mathrm{SE}\left[\hat{\beta}_1\right] = \frac{s_e}{\sqrt{S_{xx}}}$$

.

从而我们有：

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\mathrm{SE}\left[\hat{\beta}_0\right]} \sim t(n-2)$$
$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\mathrm{SE}\left[\hat{\beta}_1\right]} \sim t(n-2)$$

.

β_0 和 β_1 的置信区间

β_0 的置信区间：

$$\hat{\beta}_0 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot \mathrm{SE}\left[\hat{\beta}_0\right],$$

β_1 的置信区间：

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot \mathrm{SE}\left[\hat{\beta}_1\right],$$

其中 $P\left(t(n-2) > t_{1-\alpha/2}(n-2)\right) = \alpha/2.$

R 中求置信区间

```
confint(stop_dist_model, level = 0.95)
```

```
##                   2.5 %    97.5 %
## (Intercept) -31.167850 -3.990340
## speed         3.096964  4.767853
```

假设检验

以 β_0 为例，对于 β_0 的假设检验为：

$$H_0 : \beta_0 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_0 \neq 0$$

检验统计量：

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{\mathrm{SE}\left[\hat{\beta}_0\right]} = \frac{\hat{\beta}_0}{s_e\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}}} \sim t(n-2).$$

R 中的假设检验

```
stop_dist_model_summary$coefficients
```

```
##               Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -17.579095  6.7584402 -2.601058 1.231882e-02
## speed         3.932409  0.4155128  9.463990 1.489836e-12
```

F 检验

F 检验是为了检验回归的显著性。H_0 为 Y 不依赖于 X。

通过误差分解，我们有方差分析表：

来源	平方和	自由度	均方
回归	$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	1	$\mathrm{SSR}/1$
误差	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$	$n-2$	$\mathrm{SSE}/(n-2)$
总	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$	$n-1$	

F 检验

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2/1}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2/(n-2)} \sim F_{1,n-2}$$

注意：在一元线性回归中，F 检验和回归系数 β_1 的 t 检验是等价的。

R 中的 F 检验

```
anova(stop_dist_model)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: dist
##           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## speed      1  21186 21185.5  89.567 1.49e-12 ***
## Residuals 48  11354   236.5
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.
```

Outline

还记得一元线性回归模型的假设吗?

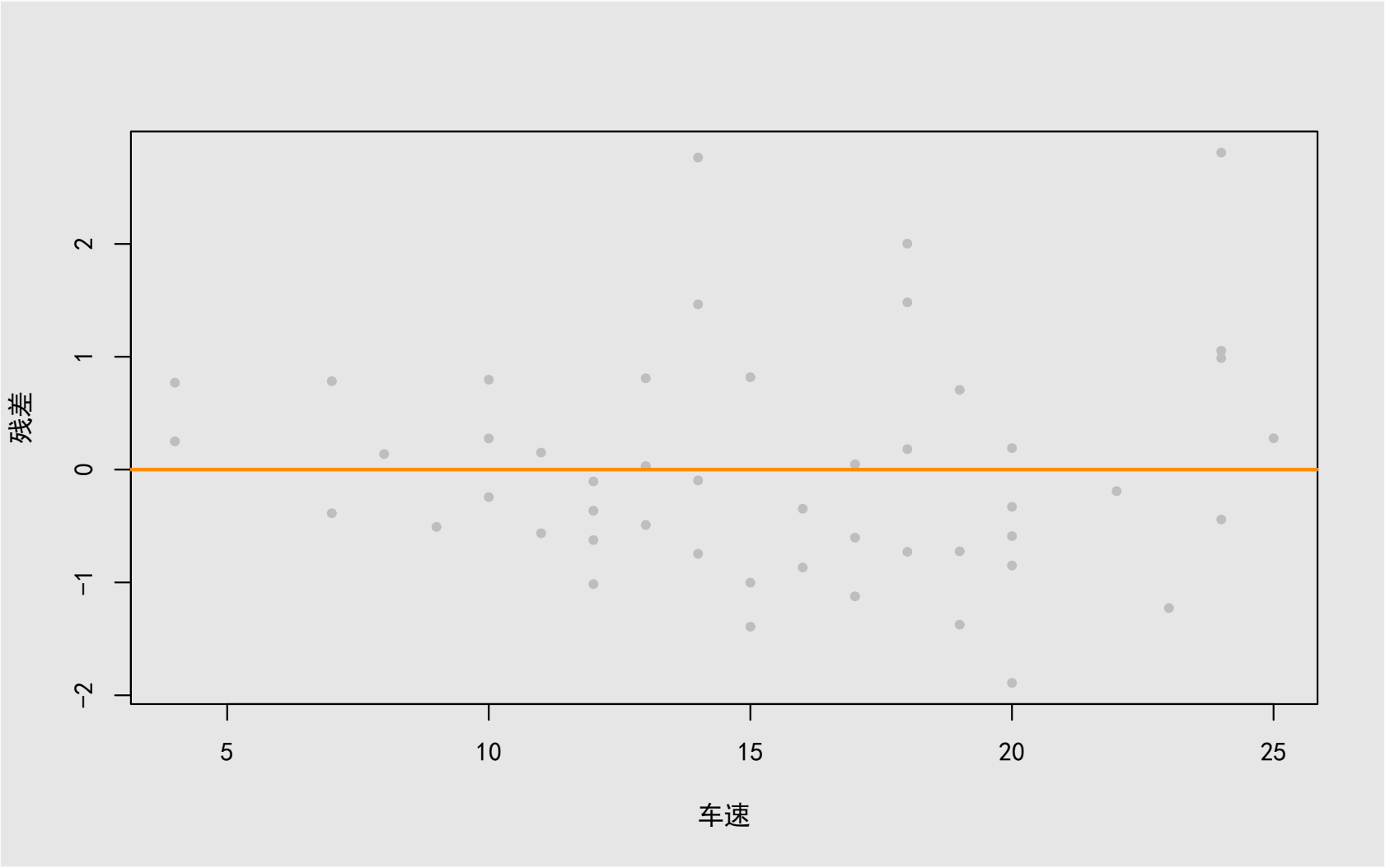
- 如果满足假设，完美 √
- 如果不满足假设? Garbage in, garbage out.

残差分析

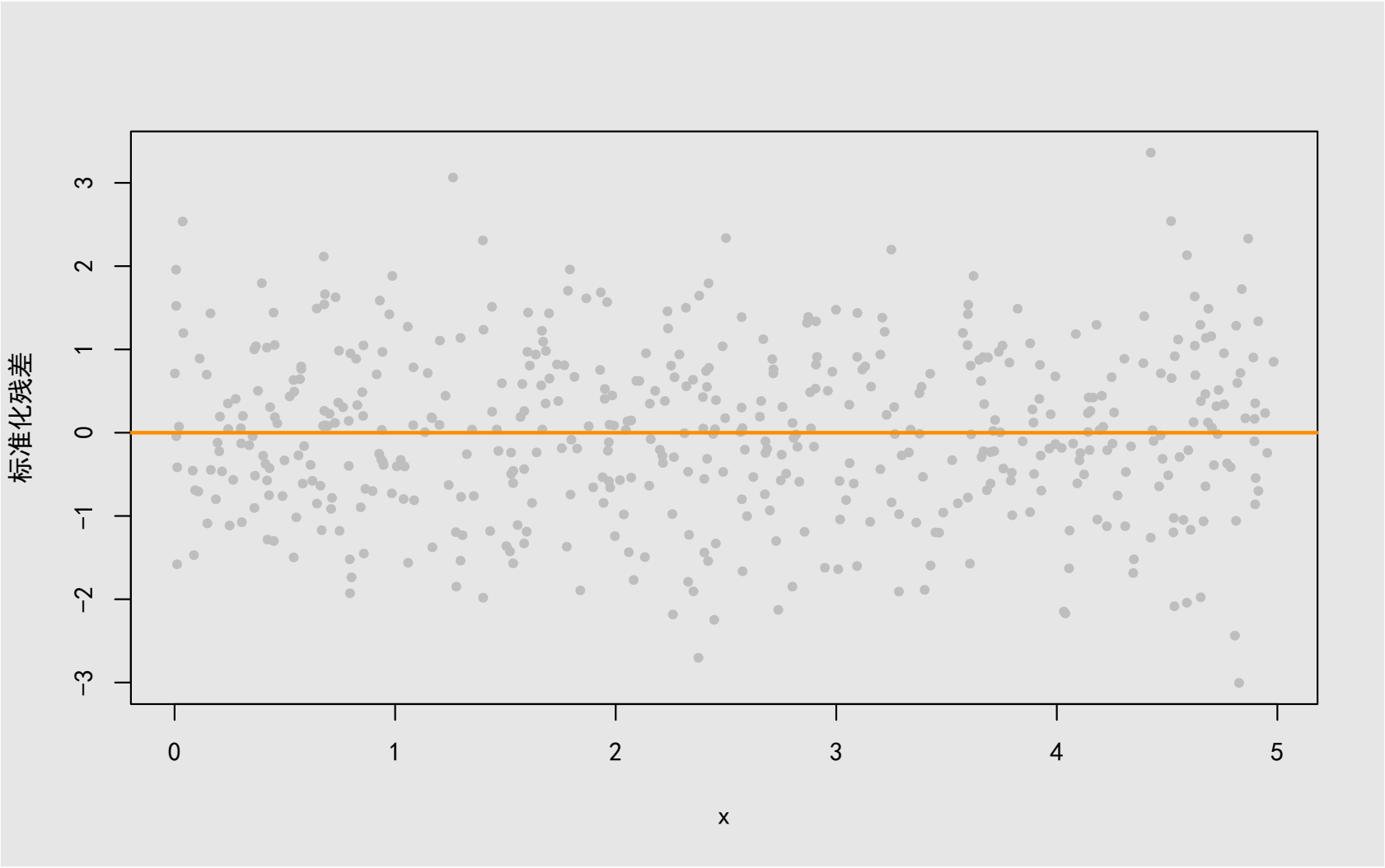
在满足假设的条件下：

- $\bar{e} = 0$.
- $\mathrm{Var}(e_i) = s_e^2$.
- 标准化残差 $e_i^* = \frac{e_i - 0}{s_e}$.
- 当 $n \to +\infty$ 时，$e_i^* \sim N(0, 1)$.

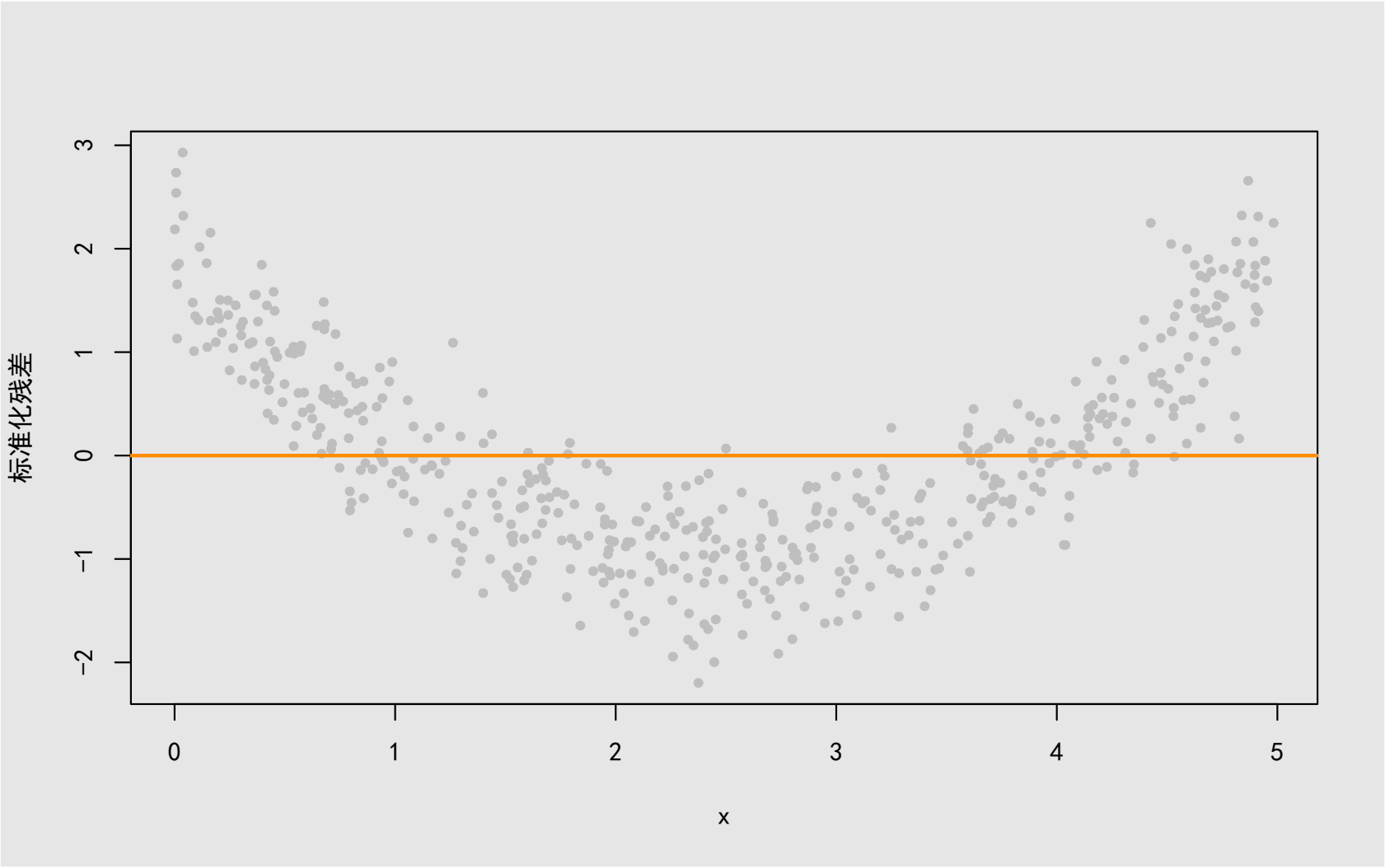
标准化残差图



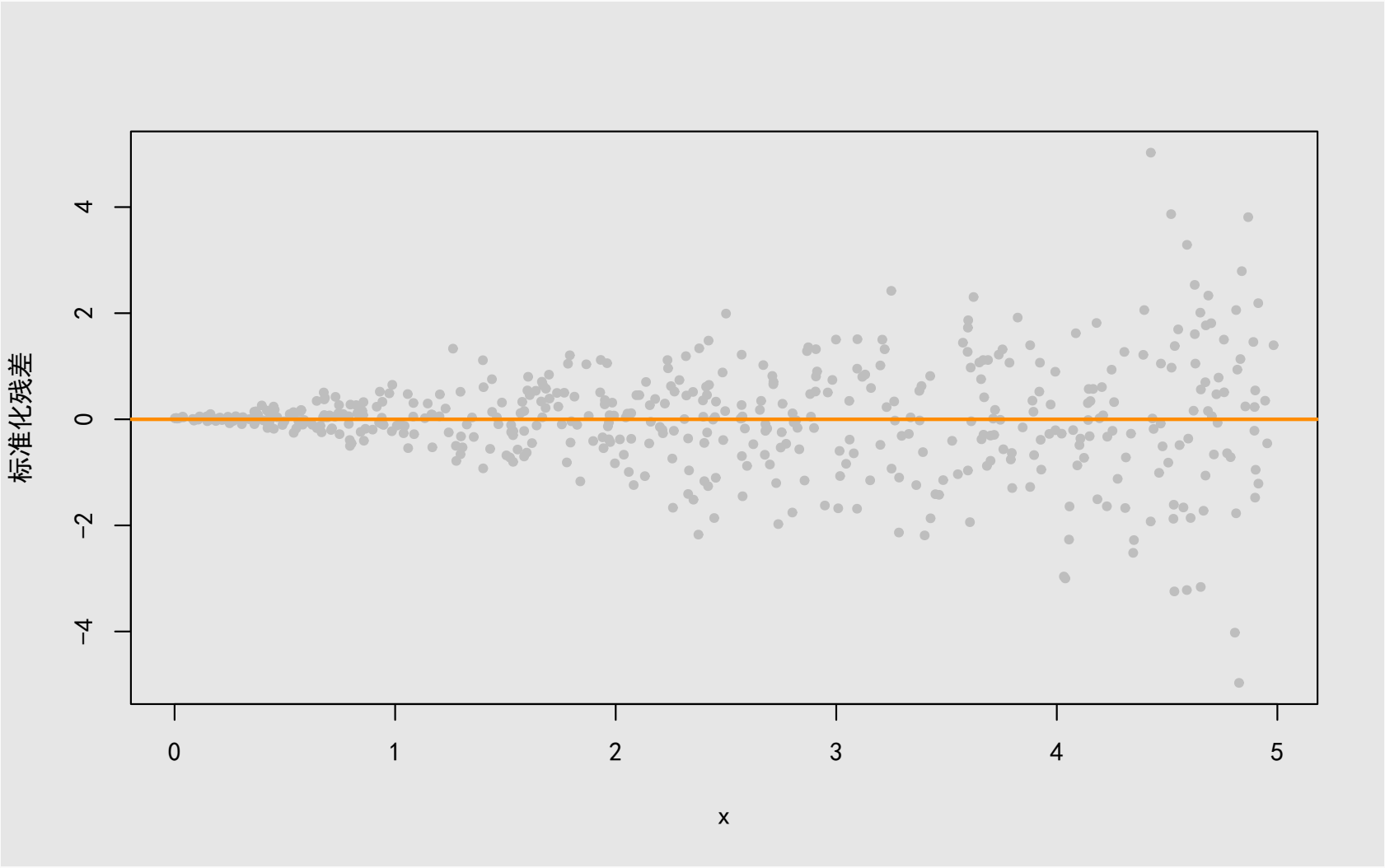
拟合良好



非线性



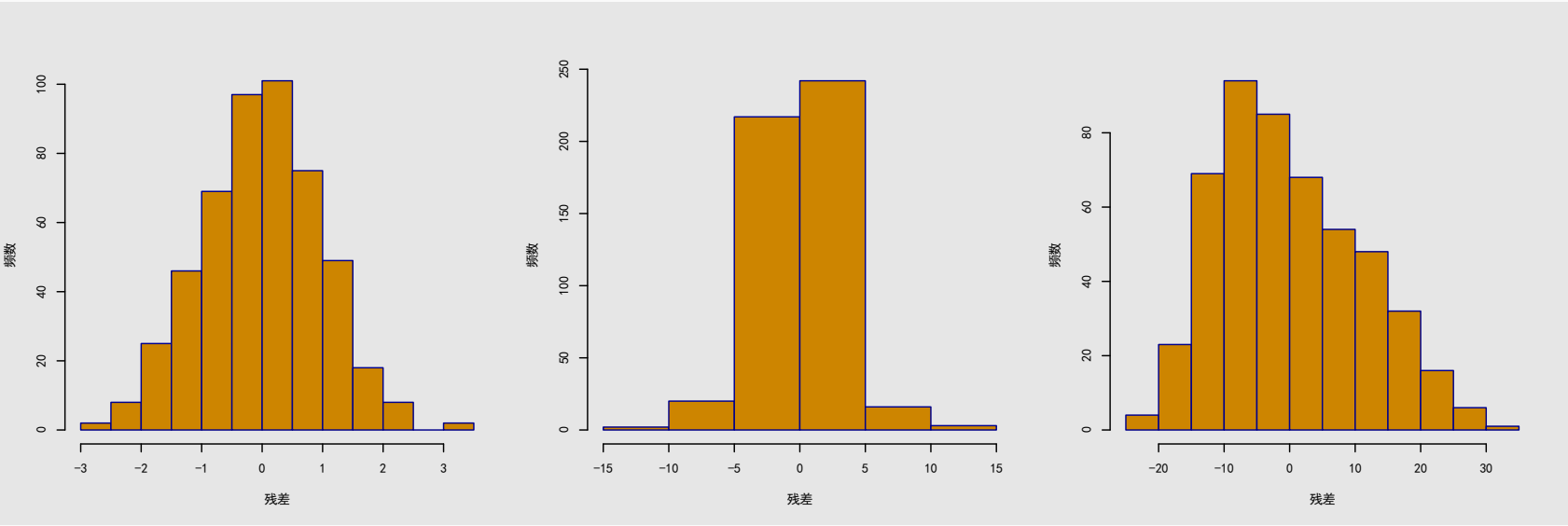
异方差



正态性

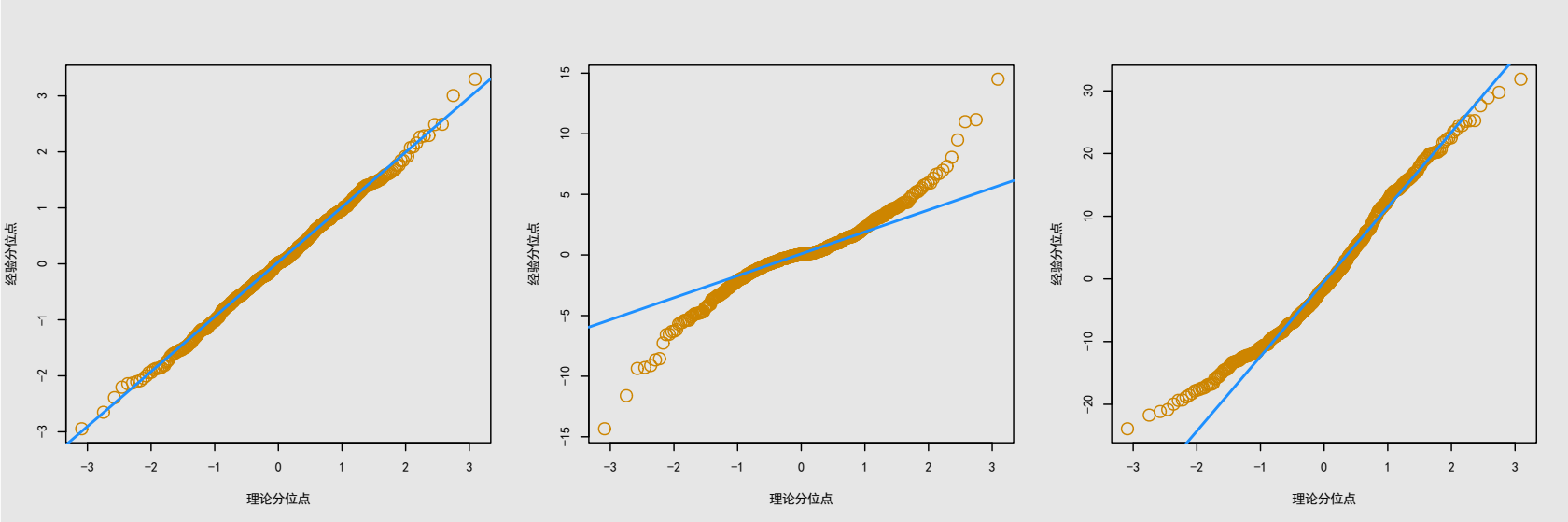
1. 直方图
2. PP 图或者 QQ 图
3. 正态性假设检验

正态性-直方图


频数
残差
0
20
40
60
80
100
−3
−2
−1
0
1
2
3
频数
残差
0
50
100
150
200
250
−15
−10
−5
0
5
10
15
频数
残差
0
20
40
60
80
−20
−10
0
10
20
30

正态性 - PP 图或 QQ 图

1. PP 图（Percentile-Percentile）
2. QQ 图（Quantile-Quantile）



正态性检验

Shapiro 检验，请点击这里查看更多检验理论细节。

```
shapiro.test(stop_dist_model$residuals)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  stop_dist_model$residuals
## W = 0.94509, p-value = 0.02152
```

序列相关

不满足“残差独立”的假设，可从残差图可以看出。产生的主要原因有:

1. 重要的解释变量被遗漏
2. 模型函数形式错误
3. 时间序列自变量

Outline

点预测

- 给定未知的 x，点预测为 $\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$。
- $E(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x$.
- 我们可以用 $\hat{y}(x)$ 来估计 $E(Y|X = x)$，因为 $E(\hat{y}(x)) = \beta_0 + \beta_1 x$.

置信区间

- $\mathrm{Var}[\hat{y}(x)] = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}} \right)$.
- $\hat{y}(x) \sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x-x)^2}{S_{xx}} \right) \right)$.

置信区间

$$\hat{y}(x) \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}}.$$

R 中求置信区间

```
new_speeds = data.frame(speed = c(5, 21))
predict(stop_dist_model, newdata = new_speeds,
        interval = c("confidence"), level = 0.99)
```

```
##          fit        lwr      upr
## 1   2.082949 -10.89309 15.05898
## 2 65.001489  56.45836 73.54462
```

预测区间

给定 x，我们想预测 Y，我们知道这个新的观测值和 $\hat{y}$ 之间（也就是真实值和回归线之间）差的是一个 ϵ。我们对于 Y 的预测依然是 $\hat{y}$，但是这个预测的方差更大：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\hat{y}(x)+\epsilon] &= \mathrm{Var}[\hat{y}(x)] + \mathrm{Var}[\epsilon] \\ &= \sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right)+\sigma^2 \\ &= \sigma^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right)\end{aligned}$$

预测区间

预测区间

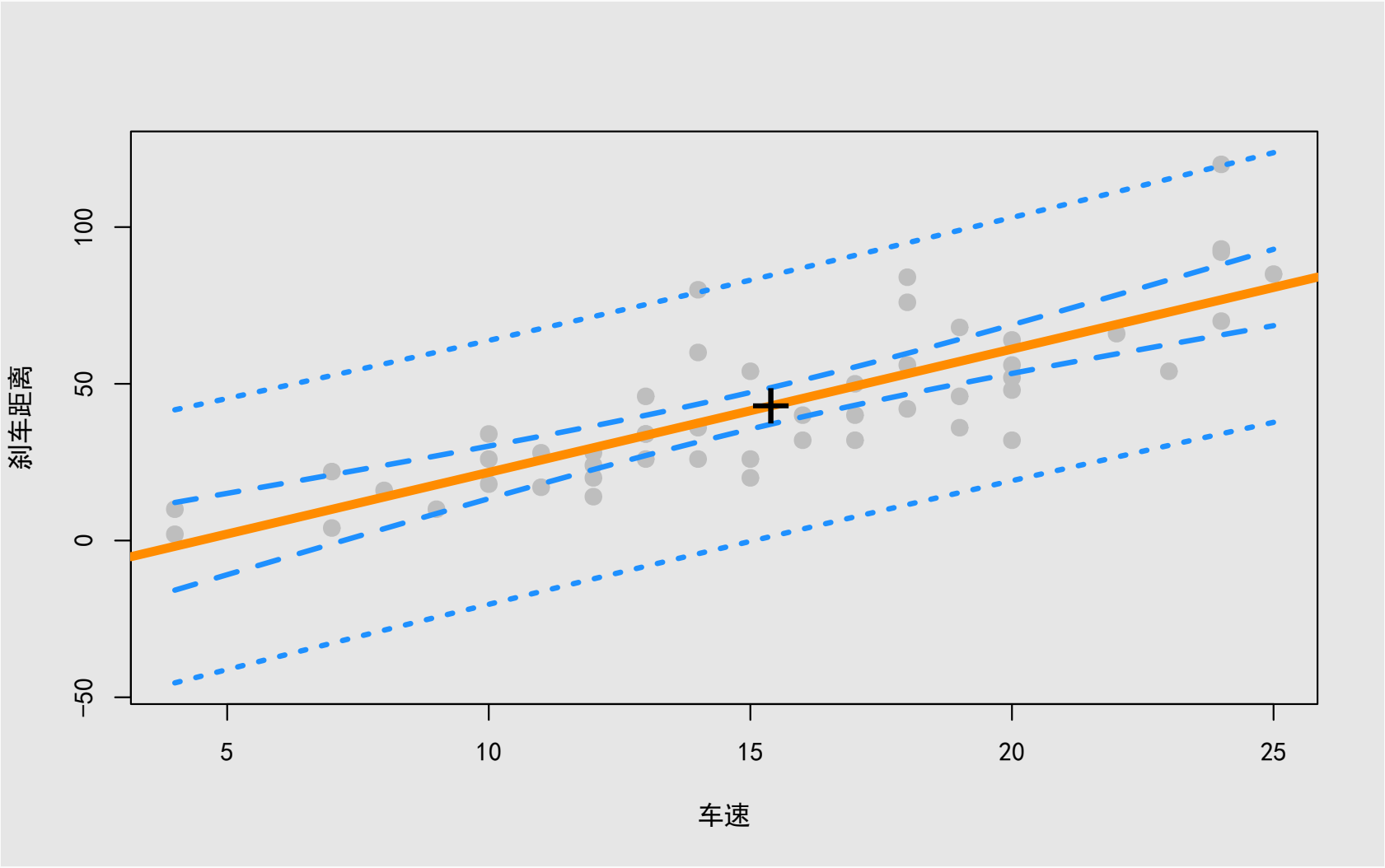
$$\hat{y}(x) \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot s_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}}.$$

R 中求预测区间

```
new_speeds = data.frame(speed = c(5, 21))
predict(stop_dist_model, newdata = new_speeds,
        interval = c("prediction"), level = 0.99)
```

```
##          fit        lwr       upr
## 1   2.082949 -41.16099  45.32689
## 2 65.001489  22.87494 107.12803
```

置信带和预测带



Outline

应用上一讲所采集的班级同学数据，考虑构建一个回归模型，并对研究结果进行分析和解释。