北京航空航天大学
经济管理学院
BEIHANG UNIVERSITY
SCHOOL OF ECONOMICS AND MANAGEMENT

第 6 讲：判别分析

康雁飞

数量经济与商务统计系

Outline

1. 为什么判别分析?
2. 距离判别法
3. Fisher 判别法
4. R 中进行判别分析
5. 作业

Outline

1 为什么判别分析?

2 距离判别法

3 Fisher 判别法

4 R 中进行判别分析

5 作业

判别分析（Discriminant Analysis）的目的

- 已知某客观事物按照某种标准可分为 k 个总体 $G_1, G_2, \cdots, G_k$
- 根据已掌握的各个总体的样本信息，总结事物分类的规律
- 建立合理有效的判别规则

例如：

- 根据病人的诸项检验指标，进行疾病诊断
- 根据已有的气象资料来进行气象预报
- 根据心理测试问题，判断受试者的基本心理特征

例：根据个人信用资料，做违约风险评估

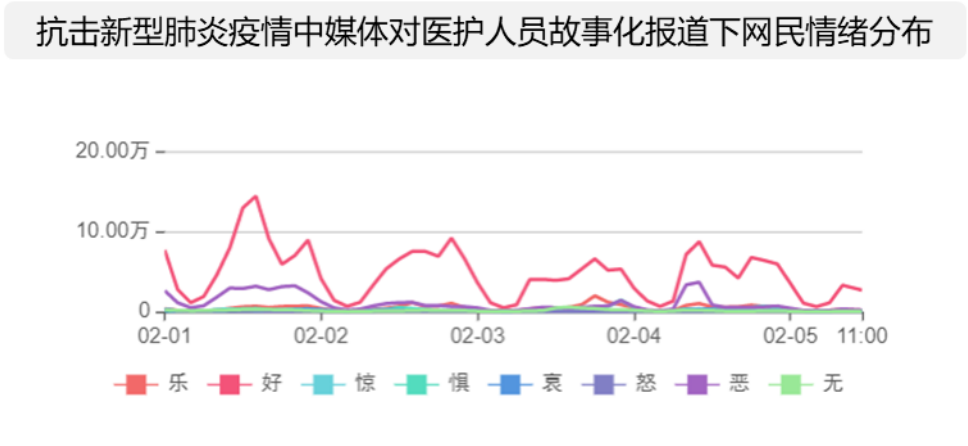
数据：

- 个人基本资料（性别、年龄、学历、婚姻）
- 实物资产（房、车），收入（工资、股票、配偶收入）
- 社交资产（微信好友个数、电话本好友数、QQ 好友数...）
- 贷款模式（贷款总额、还款年限、月付）
- 违约记录

目的：

- 识别：人群类型 + 贷款模式 $\Rightarrow$ 违约风险
- 向客户建议贷款总额和贷款模式（还款年限、月付）

例：舆情分析



来源：https://www.eefung.com/daily-report/20200205163459

例：垃圾邮件分类（Spam e-mail classification）

- 来源：ewlett-Packard Labs
- 4601 封邮件，57 个变量
- 判别：每封邮件是否为垃圾邮件（spam or non-spam）

数据样例

```
##      charSemicolon charRoundbracket charSquarebracket charExclamation
## 209          0.000            0.176              0.000           0.353
## 3659         0.000            0.000              0.000           0.000
## 449          0.061            0.020              0.000           0.041
## 2256         0.000            0.096              0.027           0.068
## 2727         0.000            0.166              0.000           0.000
## 201          0.000            0.241              0.000           1.045
## 3596         0.000            0.000              0.000           0.000
## 4455         0.000            0.000              0.000           0.000
## 1476         0.000            0.092              0.000           0.417
## 4434         0.000            0.229              0.000           0.114
##      charDollar charHash capitalAve capitalLong capitalTotal    type
## 209       0.000    0.000       2.250          13           81    spam
## 3659      0.000    0.000       1.000           1            5 nonspam
## 449       0.041    0.000       2.351          69          254    spam
## 2256      0.000    0.000       2.059          25          593 nonspam
## 2727      0.000    0.000       3.888          55          140 nonspam
## 201       0.321    0.000       5.047         140          212    spam
## 3596      0.000    0.000       1.000           1            5 nonspam
```

判别分析

问题：判别分析的输入是什么？

1. $X_{n\times p}$ 分为 K 类：$G_1, \cdots, G_K$。
2. 每行样本都有类标签（有监督学习，supervised learning）。
3. 假设第 k 个类的均值为 $\mu_k = \frac{1}{n_k} \sum_{x \in G_k} x$，方差协方差矩阵为 Σ_k。

Outline

1 为什么判别分析?

2 距离判别法

3 Fisher 判别法

4 R 中进行判别分析

5 作业

距离判别法

离哪个类的距离最近，就属于哪一类。

距离如何定义？马氏距离

$$d^2(x, G_k) = (x - \mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (x - \mu_k)$$

两个类别情形

可根据以下判别函数建立判别规则：

$$W(x) = d^2(x, G_1) - d^2(x, G_2).$$

如何建立判别规则?

只有一个判别变量（$p = 1$）

假设两个类别总体方差相等，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$，用 s^2 估计。我们可以写出判别函数：

$$W(x) = \frac{(x - \mu_1)^2 - (x - \mu_2)^2}{s^2}.$$

当 $\mu_1 > \mu_2$ 时，判断规则为：

$$x \in \begin{cases} G_1, & x > \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \\ G_2, & x < \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \\ \text{Unknown}, & x = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \end{cases}$$

多个总体的情形（更一般的情况）

- 假设有 K 个总体：$G_1, \cdots, G_K$。
- 第 k 个类的均值为 $\mu_k = \frac{1}{n_k} \sum_{x \in G_k} x$，方差协方差矩阵为 Σ_k。

问题：$\forall x \in R^p$，x 属于哪一类?

- 计算 $d^2(x, G_k)$，求最小值。
- $\arg\min_k d^2(x, G_k)$。

多个总体的情形

当 $\Sigma_1 = \cdots = \Sigma_K = \Sigma$ 时，

$$
\begin{aligned}
d^2(x, G_k) =& (x - \mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (x - \mu_k) \\
=& x^T \Sigma^{-1} x - 2[x^T \Sigma^{-1} \mu_k - \frac{1}{2} \mu_k^T \Sigma^{-1} \mu_k].
\end{aligned}
$$

多个总体的情形

定义一个线性函数 $f_k(x) = x^T\Sigma^{-1}\mu_k - \frac{1}{2}\mu_k^T\Sigma^{-1}\mu_k$, 那么

$$
\begin{aligned}
d^2(x, G_1) &= x^T\Sigma^{-1}x - 2f_1(x) \\
d^2(x, G_2) &= x^T\Sigma^{-1}x - 2f_2(x) \\
&\vdots \\
d^2(x, G_K) &= x^T\Sigma^{-1}x - 2f_K(x)
\end{aligned}
$$

$$
x \in G_i \Leftrightarrow d^2(x, G_i) = \min_{k=1,\cdots,K}\{d^2(x, G_k)\}
$$

$$
\Leftrightarrow f_i(x) = \max_{k=1,\cdots,K}\{f_k(x)\}.
$$

Outline

1 为什么判别分析?

2 距离判别法

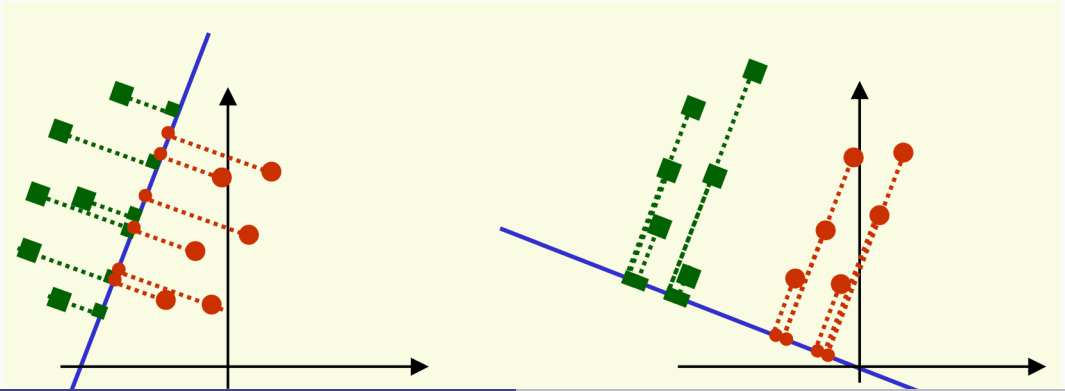
3 Fisher 判别法

4 R 中进行判别分析

5 作业

Fisher 判别法

- PCA：通过平移 + 旋转省去数据变异不大方向的信息。
- Fisher 判别法：将 K 组的 p 维数据投影在某一个方向，对投影点来说能使得组与组之间尽可能地分开。



Fisher 判别法

- 假设有 K 个总体：$G_1, \cdots, G_K$。
- 第 k 个类的均值为 μ_k，方差协方差矩阵为 Σ_k。
- $w^T x \in R^1$ 为 x 在 w 方向上的投影。
- 寻找方向 $w \in R^p$，使得类与类之间的分辨度尽可能大，而类内的点尽可能聚合。

Fisher 判别法

- 组间离差

$$\begin{aligned}\tilde{S}_B &= \sum_{k=1}^{K} n_k (w^T \mu_k - w^T \mu)^2 \\ &= w^T [\sum_{k=1}^{K} n_k (\mu_k - \mu)(\mu_k - \mu)^T] w \\ &= w^T S_B w.\end{aligned}$$

Fisher 判别法

- 组内离差

$$\begin{aligned}\tilde{S}_W &= \sum_{k=1}^{K} \sum_{x \in G_k} (w^T x - w^T \mu_k)^2 \\ &= w^T [\sum_{k=1}^{K} \sum_{x \in G_k} (x - \mu_k)(x - \mu_k)^T] w \\ &= w^T S_W w.\end{aligned}$$

.

Fisher 判别法

Fisher 判别法的思想是最大化：

$$J(w) = \frac{w^T S_B w}{w^T S_W w}.$$

求导得到：

$$S_W^{-1} S_B w = \lambda w.$$

将 $S_W^{-1} S_B$ 特征值排序 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p$，最大的特征值对应的特征向量记为 w_1，记为判别效率最高的方向。

判别方法

- 如果只使用第一个方向，按照 $p = 1$ 的情形使用距离判别法。
- 判别函数：$w_1^T x$.
- 判别效率：

$$\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i}.$$

判别方法

- 若使用一维判别函数判别效率太低，可采用 m 个特征向量，然后按 $p > 1$ 的情形使用距离判别法，对应的判别效率为：

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i}.$$

Outline

1 为什么判别分析?

2 距离判别法

3 Fisher 判别法

4 R 中进行判别分析

5 作业

R 中进行判别分析

现欲对企业经营状况进行分类。

- 指标包括（7 个）：企业规模 (is)、服务 (se)、雇员工资比例 (sa)、利润增长 (prr)、市场份额 (ms)、市场份额增长 (msr)、资金周转速度 (cs)。
- 企业被划分为 3 类：上升企业 (group-1)、稳定企业 (group-2)、下降企业 (group-3)。
- 训练样本：有 90 个企业，其中 30 个属于上升型、30 个属于稳定型、30 个属于下降型。
- 希望找出一个分类标准，以便对企业进行分类。

R 中进行判别分析

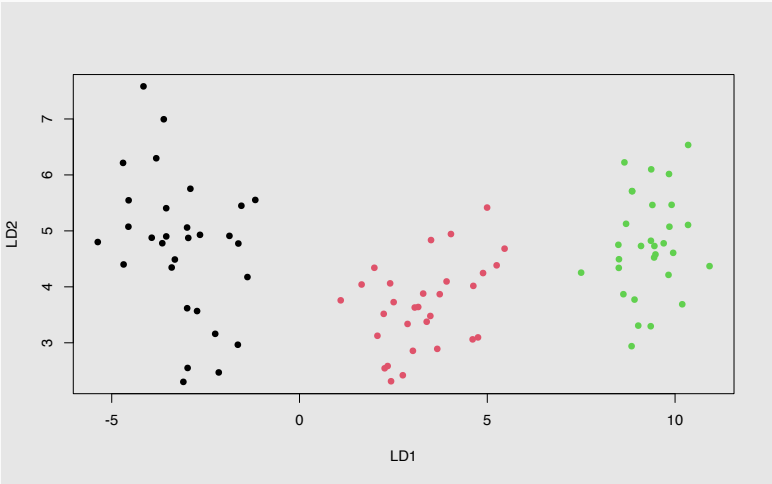
```
disc <- read.csv('./data/disc.csv')
industry.LDA = lda(group ~ ., disc)
```

请写出第一判别函数和第二判别函数

```
industry.LDA$scaling
```

```
##                LD1           LD2
## is    0.035089436  0.005270321
## se    3.283469877  0.567378405
## sa    0.037376069  0.041257360
## prr -0.007020058  0.011662758
## ms    0.068133230  0.048184889
## msr -0.023230481  0.043690230
## cs  -0.384789345 -0.158906969
```

投影

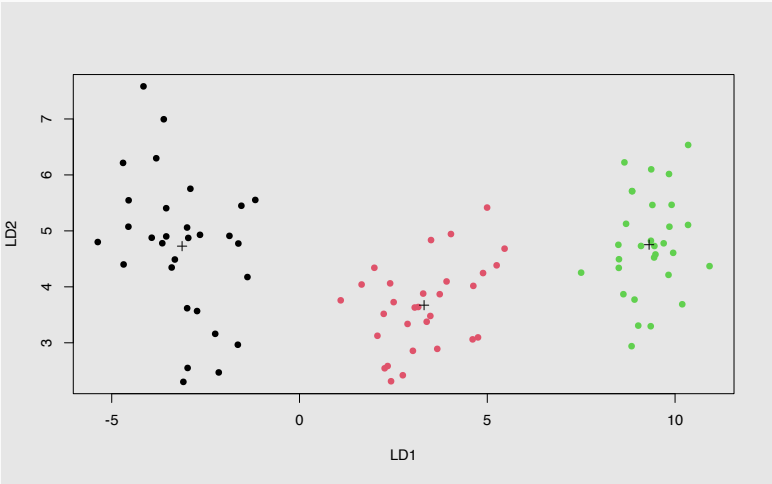


组中心处的函数值（组中心的投影）

```
mean.lda <- industry.LDA$means %*% industry.LDA$scaling
mean.lda
```

```
##          LD1      LD2
## 1 -3.126469 4.727281
## 2  3.316990 3.672425
## 3  9.308880 4.753131
```

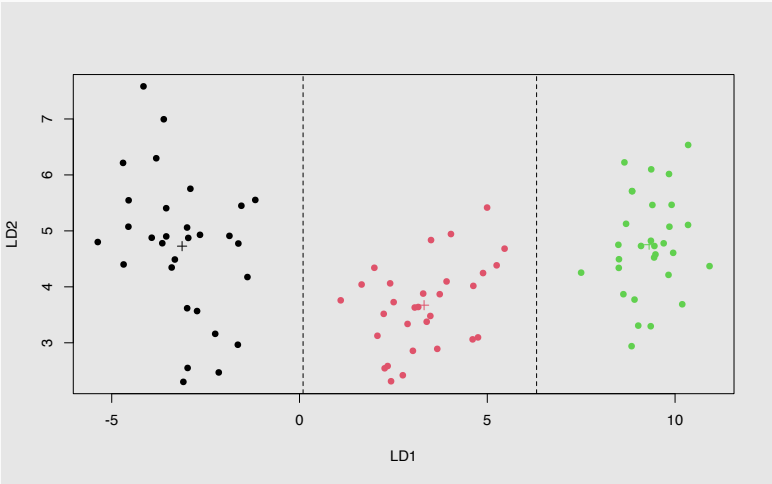
投影



问题

- 假如三种类型的企业在第一判别函数上的方差没有显著差异；给定 A 企业在 8 个判别变量上的取值情况；如何采用第一判别函数，给出判断该企业属于哪一类型的判别函数?
- 给定 A 企业在 7 个判别变量上的取值情况：$x_1 = 51.9$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 37.4$, $x_4 = 10.2$, $x_5 = 36.4$, $x_6 = 3.5$, $x_7 = 6.7$，如何采用第一判别函数，判断该企业属于哪一类型?

问题



问题

```
industry.LDA$scaling[,1] %*%
  c(51.9, 0.5, 37.4, 10.2, 36.4, 3.5, 6.7)
```

```
##           [,1]
## [1,] 4.609791
```

其他常用的判别模型

1. 贝叶斯判别模型
2. k 近邻
3. 支持向量机
4. 决策树
5. 随机森林
6. 等等

Outline

1 为什么判别分析?

2 距离判别法

3 Fisher 判别法

4 R 中进行判别分析

5 作业

运用 Fisher 判别法，使用 `iris` 数据进行判别分析。请撰写综合分析报告，并重点回答以下问题：

1. 第一判别函数对判别模型的贡献是多大（判别效率)?
2. 请写出第一判别函数和第二判别函数的表达式（非标准化)?
3. 请解释两个判别函数的大致含义。
4. 某鸢尾花的四个变量取值分别为 5.1，3.5，1.4，0.2，假设三种鸢尾花在第一判别函数上的方差没有显著差异，请采用第一判别函数，为该鸢尾花判断类型。
5. 利用 Fisher 判别法使用 `iris` 的前 135 样本点进行建模分析，并用 `predict()` 对后 15 个样本点进行预测。