北京航空航天大學
经济管理学院
BEIHANG UNIVERSITY
SCHOOL OF ECONOMICS AND MANAGEMENT

第 3 讲：多元线性回归模型

康雁飞

2020-05-19

Outline

1 多元线性回归模型

2 模型估计

3 模型推断

4 模型诊断

5 变量选择

6 非线性回归

7 作业

Outline

1 多元线性回归模型

2 模型估计

3 模型推断

4 模型诊断

5 变量选择

6 非线性回归

7 作业

多元线性回归模型

- 因变量只受单一自变量影响的情况非常少见。
- 通常影响一个变量的变量有多个。
- 一元线性回归 $\Rightarrow$ 多元线性回归。

两个自变量

我们先假设有两个自变量：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \epsilon_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

其中 $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

- 我们需要找到一个面，尽可能的拟合样本点。
- 问题：如何寻找?

两个自变量

我们可以最小化：

$$f(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2}))^2,$$

然后根据优化理论：

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_0} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial \beta_1} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial \beta_2} = 0$$

多元线性回归模型

对于多变量的情况：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_{p-1} x_{i(p-1)} + \epsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

其中 $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

- $p - 1$ 个自变量。
- $p + 1$ 个待估参数。

Outline

1 多元线性回归模型

2 模型估计

3 模型推断

4 模型诊断

5 变量选择

6 非线性回归

7 作业

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(p-1)} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n(p-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

$$Y = X\beta + \epsilon$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(p-1)} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n(p-1)} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

矩阵形式

我们可以最小化：

$$f(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{p-1}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_{p-1} x_{i(p-1)}))^2$$

然后得到方程：

$$X^\top X \beta = X^\top y.$$

然后我们可以得到参数估计：

$$\hat{\beta} = \left(X^\top X\right)^{-1} X^\top y.$$

R 中的多元线性回归

例：某商业银行 25 家分行 2002 年的主要业务数据

```
## 'data.frame':    25 obs. of  5 variables:
##  $ 不良贷款          : num  0.9 1.1 4.8 3.2 7.8 2.7 1.6 12.5 1 2.6 ...
##  $ 各项贷款余额      : num  67.3 111.3 173 80.8 199.7 ...
##  $ 本年累计应收贷    : num  6.8 19.8 7.7 7.2 16.5 2.2 10.7 27.1 1.7 9.1 ...
##  $ 贷款项目个数      : num  5 16 17 10 19 1 17 18 10 14 ...
##  $ 本年固定资产投资额: num  51.9 90.9 73.7 14.5 63.2 2.2 20.2 43.8 55.9 64.3 ...
```

相关性

```
par(family = 'SimHei')
corrplot::corrplot(cor(loan))
```

相关系数矩阵

```
##                   不良贷款 各项贷款余额 本年累计应收贷 贷款项目个数
## 不良贷款          1.0000000  0.8435714    0.7315050  0.7002815
## 各项贷款余额      0.8435714  1.0000000    0.6787718  0.8484164
## 本年累计应收贷    0.7315050  0.6787718    1.0000000  0.5858315
## 贷款项目个数      0.7002815  0.8484164    0.5858315  1.0000000
## 本年固定资产投资额 0.5185181  0.7797022    0.4724310  0.7466458
##                   本年固定资产投资额
## 不良贷款                   0.5185181
## 各项贷款余额               0.7797022
## 本年累计应收贷             0.4724310
## 贷款项目个数               0.7466458
## 本年固定资产投资额         1.0000000
```

回归模型

```
loan.model <- lm(不良贷款~各项贷款余额+
                          本年累计应收贷+
                          贷款项目个数+
                          本年固定资产投资额,
                        data = loan)
loan.model.summary <- summary(loan.model)
```

回归模型

```
##
## Call:
## lm(formula = 不良贷款 ~ 各项贷款余额 + 本年累计应收贷 +
##     贷款项目个数 + 本年固定资产投资额, data = loan)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -2.9198 -0.9507 -0.2880  1.0334  3.1037
##
## Coefficients:
##                   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)        -1.02164    0.78237  -1.306  0.20643
## 各项贷款余额        0.04004    0.01043   3.837  0.00103 **
## 本年累计应收贷      0.14803    0.07879   1.879  0.07494 .
## 贷款项目个数        0.01453    0.08303   0.175  0.86285
## 本年固定资产投资额 -0.02919    0.01507  -1.937  0.06703 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.779 on 20 degrees of freedom
```

估计误差项的方差

误差项方差 σ^2 可以通过 s_e^2 来估计：

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p} = \frac{e^\top e}{n-p}$$

注意：$E(s_e^2) = \sigma^2$.

估计误差项的标准差

```
loan.model.summary$sigma
```

```
## [1] 1.778752
```

拟合优度

通过方差分解我们有：$\text{SST} = \text{SSE} + \text{SSR}$.

拟合优度（Goodness of Fit），又叫测定系数（Coefficient of Determination）：

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

拟合优度越大模型就越好吗？拟合优度小模型就一定差吗？

拟合优度

R^2 是 p 的单调递增函数。

调整的拟合优度

$$R^2_{\text{adj}} = 1 - \frac{SSE/(n-p)}{SST/(n-1)}$$

调整的拟合优度

```
loan.model.summary$r.squared
```

```
## [1] 0.797604
```

```
loan.model.summary$adj.r.squared
```

```
## [1] 0.7571248
```

Outline

1 多元线性回归模型

2 模型估计

3 模型推断

4 模型诊断

5 变量选择

6 非线性回归

7 作业

Gauss-Markov 定理

如果基本假设成立，最小二乘估计量是总体参数的线性最小方差无偏估计量。

$\hat{\beta}$ 的分布

我们可以得到：

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \sigma^2 \left(X^\top X\right)^{-1}\right).$$

所以：

$$E[\hat{\beta}_j] = \beta_j, \mathrm{Var}[\hat{\beta}_j] = \sigma^2 C_{jj},$$

其中 $C = \left(X^\top X\right)^{-1}$。

$\hat{\beta}$ 的标准误（Standard Error）

$\hat{\beta}$ 的标准误为：

$$\mathrm{SE}[\hat{\beta}] = s_e\sqrt{(X^\top X)^{-1}}$$

对每一个 $\hat{\beta}_j$，

$$\mathrm{SE}[\hat{\beta}_j] = s_e\sqrt{C_{jj}}.$$

对 $\hat{\beta}$ 的推断

因为：

$$\hat{\beta}_j \sim N\left(\beta_j, \sigma^2 C_{jj}\right).$$

我们得到：

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s_e \sqrt{C_{jj}}} \sim t_{n-p}.$$

$\hat{\beta}$ 的区间估计

对每一个 $\hat{\beta}_j$，其区间估计为：

$$\hat{\beta}_j \pm t_{\alpha/2,n-p} \cdot s_e \sqrt{C_{jj}}$$

$\hat{\beta}$ 的区间估计

```
confint(loan.model, level = 0.99)
```

```
##                                0.5 %      99.5 %
## (Intercept)              -3.24775491 1.20447538
## 各项贷款余额              0.01035187 0.06972683
## 本年累计应收贷           -0.07616275 0.37223054
## 贷款项目个数             -0.22172819 0.25078690
## 本年固定资产投资额       -0.07208059 0.01369486
```

预测-置信区间

- 给定未知的 x_0，点预测为：

$$\begin{aligned}\hat{y}(x_0) &= x_0^\top \hat{\beta} \\ &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{01} + \hat{\beta}_2 x_{02} + \cdots + \hat{\beta}_{p-1} x_{0(p-1)}.\end{aligned}$$

- 这是一个无偏估计：

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\hat{y}(x_0)] &= x_0^\top \beta \\ &= \beta_0 + \beta_1 x_{01} + \beta_2 x_{02} + \cdots + \beta_{p-1} x_{0(p-1)}\end{aligned}$$

置信区间

- 标准误为：$\mathrm{SE}[\hat{y}(x_0)] = s_e\sqrt{x_0^\top \left(X^\top X\right)^{-1} x_0}.$
- 置信区间：

$$\hat{y}(x_0) \pm t_{\alpha/2,n-p} \cdot s_e\sqrt{x_0^\top \left(X^\top X\right)^{-1} x_0}.$$

置信区间

```
new.loan = data.frame(各项贷款余额 = c(100, 150, 200), 本年累计应收贷 = c(7, 20, 13),
                      贷款项目个数 = c(10, 6, 5), 本年固定资产投资额 = c(40, 76, 5))
predict(loan.model, newdata = new.loan, interval = "confidence", level = 0.99)
```

```
##        fit      lwr       upr
## 1 2.996112 1.631683  4.360541
## 2 5.813459 2.089203  9.537715
## 3 8.837354 3.896133 13.778574
```

预测区间

- 计算预测区间，我们需要加一个随机误差项，因此标准误为：

$$\mathrm{SE}[\hat{y}(x_0) + \epsilon] = s_e\sqrt{1 + x_0^\top \left(X^\top X\right)^{-1} x_0}.$$

- 预测区间为：

$$\hat{y}(x_0) \pm t_{\alpha/2,n-p} \cdot s_e\sqrt{1 + x_0^\top \left(X^\top X\right)^{-1} x_0}.$$

预测区间

```
predict(loan.model, newdata = new.loan, interval = "prediction", level = 0.99)
```

```
##        fit        lwr       upr
## 1 2.996112 -2.2457345  8.237958
## 2 5.813459 -0.4702792 12.097198
## 3 8.837354  1.7640983 15.910609
```

单参数检验

我们要检验：

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_j \neq 0$$

统计量

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\text{SE}[\hat{\beta}_j]} = \frac{\hat{\beta}_j - 0}{s_e \sqrt{C_{jj}}}$$

在零假设成立的情况下，服从 t_{n-p} 分布。

单参数检验

```
loan.model.summary$coefficients
```

```
##                        Estimate Std. Error    t value    Pr(>|t|)
## (Intercept)        -1.02163976 0.78237236 -1.3058229 0.206433969
## 各项贷款余额         0.04003935 0.01043372  3.8374953 0.001028464
## 本年累计应收贷       0.14803389 0.07879433  1.8787378 0.074935421
## 贷款项目个数         0.01452935 0.08303316  0.1749825 0.862852686
## 本年固定资产投资额 -0.02919287 0.01507297 -1.9367689 0.067030078
```

回归模型的显著性检验

通过方差分解我们有：$\mathrm{SST} = \mathrm{SSE} + \mathrm{SSR}$.

多元回归中，回归模型的显著性检验的零假设为：

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{p-1} = 0.$$

也就是说零假设为：

$$Y_i = \beta_0 + \epsilon_i.$$

备择假设为：

H_1：至少存在一个$\beta_j \neq 0, j = 1, 2, \cdots, (p-1)$

回归模型的 F 检验

我们有方差分析表：

来源	平方和	自由度	均方	F
回归	$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$	$p-1$	$\mathrm{SSR}/(p-1)$	$\mathrm{MSR}/\mathrm{MSE}$
误差	$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$	$n-p$	$\mathrm{SSE}/(n-p)$	
总	$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$	$n-1$		

回归模型的 F 检验

F 统计量为：

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2/(p-1)}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2/(n-p)},$$

p-值为：

$$p = P(F_{p-1,n-p} > F)$$

回归模型的 F 检验

```
loan.model.summary$fstatistic
```

```
##     value     numdf     dendf 
## 19.70404   4.00000 20.00000
```

Outline

1 多元线性回归模型

2 模型估计

3 模型推断

4 模型诊断

5 变量选择

6 非线性回归

7 作业

是否符合模型假设?

作业

不正常点

- 除了检查模型假设之外，还应该注意“不正常点”(unusual observations”)。
- 因为有时少量的不正常点对回归的影响是非常大的。

常见的不正常点：

1. 异常点（Outliers）
2. 高杠杆点（Points with high leverage）
3. 有影响点（Influential points）

异常点

异常点是没有被模型很好的拟合的点，通常是有很大的标准化残差（standardized residual）的观测值。

判断标准如：标准化残差的绝对值大于 3。

高杠杆点

高杠杆点，即杠杆值很大点。杠杆值只受自变量取值的影响。

杠杆值（一元线性回归）

$$h_i = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}}.$$

高杠杆点

多高的杠杆值应该引起注意呢?

通常如果某个观测值的杠杆值大于二倍的平均杠杆值，被认为是高杠杆值。

杠杆值

```
hatvalues(loan.model)
```

```
##          1          2          3          4          5          6          7
## 0.14699817 0.37700617 0.11985647 0.10804892 0.14506018 0.16892163 0.16380175
##          8          9         10         11         12         13         14
## 0.51247764 0.14807691 0.11234041 0.10369810 0.13773405 0.13179714 0.18982442
##         15         16         17         18         19         20         21
## 0.28661792 0.10235522 0.21113050 0.07722630 0.11290567 0.35554736 0.57824701
##         22         23         24         25
## 0.10095553 0.05756815 0.26663244 0.28517194
```

杠杆值

```
hatvalues(loan.model) > 2 * mean(hatvalues(loan.model))
```

```
##     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12    13
## FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
##    14    15    16    17    18    19    20    21    22    23    24    25
## FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

有影响点

有影响点是对回归模型有显著影响的观测值，一般同时具有大残差和高杠杆值的特点。可以通过库克距离（Cook's Distance）D_i 来计算。一般当 $D_i > \frac{4}{n}$ 时，判断为有影响点。

库克距离（Cook's Distance）

$$D_i = \frac{1}{p} r_i^2 \frac{h_i}{1 - h_i},$$

其中 r_i 表示标准化残差。

有影响点

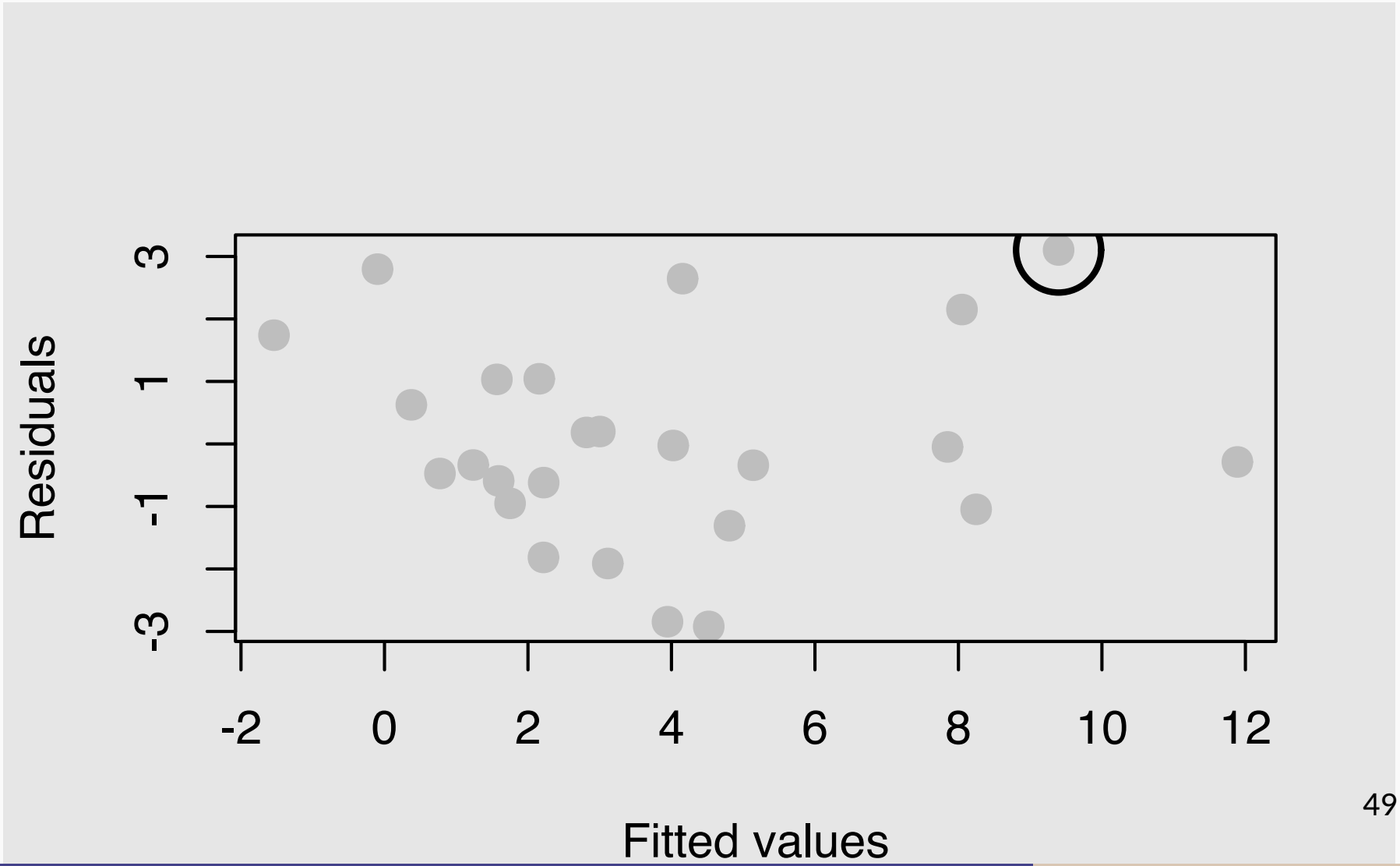
```
cooks.distance(loan.model)[8] > 4/nrow(loan)
```

```
##     8
## TRUE
```

```
cooks.distance(loan.model)[21] > 4/nrow(loan)
```

```
##     21
## FALSE
```

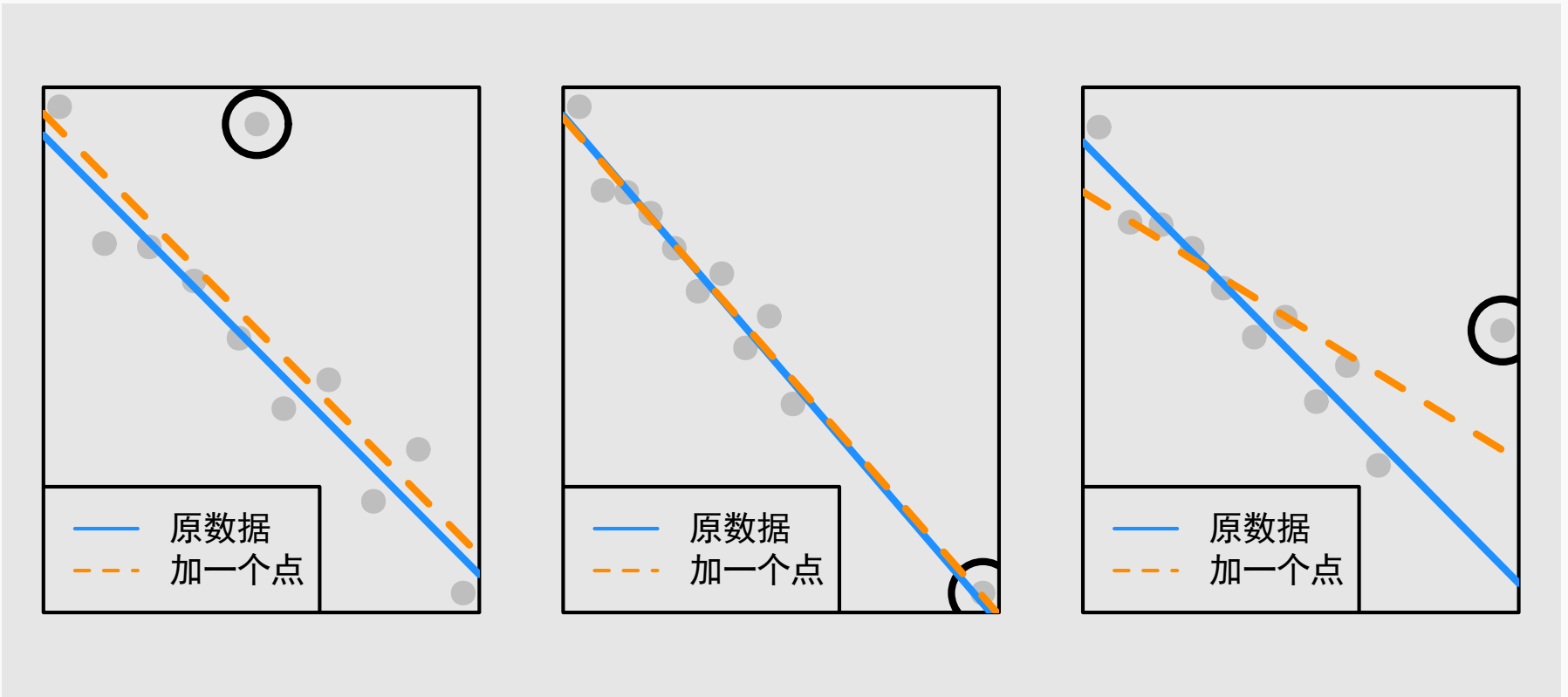
有影响点



去除有影响点?

```
##
## Call:
## lm(formula = 不良贷款 ~ 各项贷款余额 + 本年累计应收贷 +
##     贷款项目个数 + 本年固定资产投资额, data = loan.new)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.09473 -1.24993 -0.09849  0.98472  2.77202
##
## Coefficients:
##                     Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)        -0.674348   0.676097  -0.997 0.331098
## 各项贷款余额        0.039071   0.008884   4.398 0.000309 ***
## 本年累计应收贷     -0.014968   0.087032  -0.172 0.865271
## 贷款项目个数        0.039881   0.071174   0.560 0.581803
## 本年固定资产投资额 -0.017078   0.013472  -1.268 0.220223
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.513 on 19 degrees of freedom
```

例子



Outline

1 多元线性回归模型

2 模型估计

3 模型推断

4 模型诊断

5 变量选择

6 非线性回归

7 作业

变量选择

变量选择通常是一个迭代过程，在每一步中，以某种预先定好的标准来决定是否加入或提出某个自变量。这个标准可以是：

- 假设检验，如 F 检验或 t 检验
- R^2_{adj}
- Akaike information criterion (AIC) 或 Bayesian information criterion (BIC)
- Mallows's C_p
- 其他标准

向后筛选法（Backward Elimination）

在一开始假设模型中包含所有自变量，然后依据某种标准逐渐剔除不显著的变量，重复直到现存变量均不符合剔除条件。以 t 检验为例，向后筛选法为：

1. 所有自变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{p-1}$ 均包含在模型中；
   - 如果 t 检验都显著，则 $X_1, X_2, \cdots, X_{p-1}$ 均包含在模型中；
   - 若存在若干 t 检验不通过的参数，则先把 p-值最大的变量删除；
2. 对剩余的 $p-2$ 个变量做回归方程，删除 t 检验不通过中 p-值最大的变量；
3. 重复以上步骤。直到模型中所以变量均通过 t 检验。

向后筛选法

```
step(loan.model, direction = "backward")
```

```
## Start:  AIC=33.22
## 不良贷款 ~ 各项贷款余额 + 本年累计应收贷 + 贷款项目个数 +
##     本年固定资产投资额
##
##                       Df Sum of Sq     RSS    AIC
## - 贷款项目个数         1     0.097  63.376 31.255
## <none>                              63.279 33.217
## - 本年累计应收贷       1    11.168  74.447 35.280
## - 本年固定资产投资额   1    11.868  75.147 35.514
## - 各项贷款余额         1    46.594 109.873 45.011
##
## Step:  AIC=31.26
## 不良贷款 ~ 各项贷款余额 + 本年累计应收贷 + 本年固定资产投资额
##
##                       Df Sum of Sq     RSS    AIC
## <none>                              63.376 31.255
## - 本年累计应收贷       1    11.333  74.709 33.368
## - 本年固定资产投资额   1    12.147  75.523 33.639
```

向前选择法（Forward Selection）

在一开始假设模型中没有变量，计算 Y 和每一个 X_i 的一元线性回归模型，选择 p-值最小的变量，然后依据某种标准逐渐加入一个变量，重复直到剩下的变量均不符合加入条件。

向前选择法

```
step(lm(不良贷款 ~ 1, data = loan),
     scope = 不良贷款 ~ 各项贷款余额 + 本年累计应收贷 +
    贷款项目个数 + 本年固定资产投资额,
     direction = "forward")
```

```
## Start:  AIC=65.16
## 不良贷款 ~ 1
##
##                       Df Sum of Sq     RSS    AIC
## + 各项贷款余额         1    222.49  90.164 36.069
## + 本年累计应收贷       1    167.30 145.351 48.007
## + 贷款项目个数         1    153.32 159.328 50.302
## + 本年固定资产投资额   1     84.06 228.591 59.326
## <none>                             312.650 65.155
##
## Step:  AIC=36.07
## 不良贷款 ~ 各项贷款余额
##
##                       Df Sum of Sq    RSS    AIC
## + 本年固定资产投资额   1   15.4555 74.709 33.368
```

逐步回归法（Stepwise Regression）

- 前进法的问题：一旦某自变量进入模型后，它就永远留在模型中。然而，随着其他自变量的引入，一些先进入模型的变量的作用会变得不再显著。
- 向后法的问题：一旦某自变量被删除后，就永远不再进入模型。然而，随着其他自变量被删除，它的作用有可能会显著起来。

逐步回归法（Stepwise Regression）

- 对于模型外部的变量，只要还能提供显著的解释作用，则可以再次进入模型。而在模型内部的变量，只要它的 t 检验不再显著，则可以从模型中删除。
- 方法：边进边退
- 起始：同前进法
- 结束：模型外所有变量均不能通过 t 检验

逐步回归法

```
step(lm(不良贷款 ~ 1, data = loan),
     scope = 不良贷款 ~ 各项贷款余额 + 本年累计应收贷 +
    贷款项目个数 + 本年固定资产投资额,
     direction = "both")
```

```
## Start:  AIC=65.16
## 不良贷款 ~ 1
##
##                       Df Sum of Sq     RSS    AIC
## + 各项贷款余额         1    222.49  90.164 36.069
## + 本年累计应收贷       1    167.30 145.351 48.007
## + 贷款项目个数         1    153.32 159.328 50.302
## + 本年固定资产投资额   1     84.06 228.591 59.326
## <none>                             312.650 65.155
##
## Step:  AIC=36.07
## 不良贷款 ~ 各项贷款余额
##
##                       Df Sum of Sq     RSS    AIC
## + 本年固定资产投资额   1    15.455  74.709 33.368
```

Outline

1 多元线性回归模型

2 模型估计

3 模型推断

4 模型诊断

5 变量选择

6 非线性回归

7 作业

为什么非线性回归?

- 有些时候自变量和因变量之间的关系是非线性的。
- 为了捕捉到这种非线性关系，常用的方法有:

1. 非线性关系线性化，再进行线性回归估计（如多项式模型，对数模型，指数模型，幂指数模型等）
2. 样条回归（Spline Regression）
3. 广义可加模型（Generalized Additive Models）

过拟合

线性回归中拟合效果好，但外推预测效果不好。

- 样本噪音干扰过大，将部分噪音认为是特征，从而扰乱了建模规则。
- 参数太多，模型复杂度过高。

如何避免过拟合？交叉验证

1. 交叉验证：比如将数据集分成两部分，一部分作为训练集；另一部分作为测试集。用训练集建立模型，然后将测试集带入模型，验证模型的表现。
2. 模型的预测精度：可以用验证集的均方误差来测量。
3. 由于诸多实际情况下并不存在足够的数据留作验证数据，这个时候通常用留一交叉验证法(Leave-one-out)。

Outline

1 多元线性回归模型

2 模型估计

3 模型推断

4 模型诊断

5 变量选择

6 非线性回归

7 作业

1. 对课上的不良贷款例子进行模型诊断（主要针对回归假设）
2. 运用“污染数据”开展分析
    1. 计算和分析变量之间的相关关系
    2. 建立回归模型，并完成多元线性回归的建模、推断、诊断及预测过程。